GUÍA PRÁCTICA PARA LA REALIZACIÓN DE LA MEDIDA Y EL CÁLCULO DE ERRORES

1. Introducción

Medir es determinar el valor de una magnitud física comparándola con un patrón que se denomina *unidad de medida*. Por tanto, es imprescindible que todo valor numérico resultante de una medida venga acompañado de sus unidades. Por ejemplo, si alguien dice que la velocidad de un avión es de 800 no nos da ninguna información; *¿800 qué?*: ¿metros por segundo?, ¿kilómetros por hora?, ¿millas por hora?,...

Sólo al indicar la cantidad medida junto con sus unidades, *p.ej.* 800 km/h, se nos está dando alguna información. Existen diferentes sistemas de unidades, siendo posible pasar de un sistema a otro mediante operaciones aritméticas simples. Hoy en día, el sistema de unidades más empleado es el llamado **Sistema Internacional** (S.I.), y será el que utilicemos principalmente en el laboratorio. En el S.I. las unidades fundamentales: kilogramo, metro, segundo, culombio y radián.

Desafortunadamente, no es posible realizar una medida que esté libre de errores. Estos errores pueden deberse a múltiples causas. Aunque algunos errores tienen su origen en fallos humanos, siempre existen errores inherentes al proceso de medida, y que son imposibles de evitar. El orden de magnitud del error total de la medida es su *precisión*. Cuando damos el valor de una magnitud física, es muy conveniente saber cuan fiable es ese valor; esta *fiabilidad* nos la mide la precisión, y para conocerla hay que estimar el error. En este guión aprenderemos a estimar el error cometido al realizar una medida en el laboratorio.

2. Tipos de errores.

Los errores se suelen clasificar en tres grandes grupos: de precisión, sistemáticos y accidentales.

- **Error de precisión**: Todo equipo de medida tiene al menos una escala. La división más pequeña de la escala determina la mínima diferencia de magnitud que puede apreciar el equipo, es decir: su *resolución*.

  Por ejemplo, una regla convencional está dividida en centímetros y milímetros. Por tanto, cualquier medida que realicemos con dicha regla sólo nos permite conocer la longitud de un objeto con un error aproximado de 1 mm. Solo podemos disminuir este error si utilizamos un aparato de medida con mayor resolución.

  A este tipo de error se le denomina *error de precisión*. Es pues el debido a la resolución del aparato de medida; y se lo designa en este guión como ϵ_p.

- **Errores sistemáticos**: Su origen suele deberse a un mal funcionamiento o calibración del equipo de medida. Normalmente su efecto es incrementar o disminuir el valor de la medida siempre en la misma cantidad. Una vez determinado su origen es posible eliminarlo totalmente de la medida.

  Un caso sencillo de este tipo de error es un reloj que atrasa. El reloj marcará siempre la hora atrasada respecto de la correcta. Podemos establecer la hora correcta a partir de la errónea si sabemos cuanto atrasa el reloj. Otra solución es reparar el reloj.

  La única manera segura de tratar estos errores es asegurarse del correcto funcionamiento de los equipos de medida.

- **Errores accidentales**: son los resultantes de la contribución de numerosas fuentes incontrolables que desplazan de forma aleatoria el valor medido por encima y por debajo de su valor real. También suelen denominarse *errores aleatorios* o *estadísticos*. Los errores accidentales, al contrario de los errores sistemáticos, son inevitables y están presentes en todo experimento.

  Por ejemplo, si deseamos cronometrar un segundo con un reloj digital con una precisión de una centesima de segundo, se comprueba que debido al tiempo necesario para pulsar el botón de parada del cronómetro no conseguimos detenerlo justamente cuando marca 60 s, sino que siempre cometemos un error de unas pocas centésimas de segundo. Unas veces este error sera en exceso y otras veces por defecto.Estas centésimas de segundo son el error accidental que comete el experimentador al usar el cronómetro, y solo se deben en este caso a la pericia del experimentador; no al funcionamiento o calibración del reloj.

El error accidental se designa en este guión como ϵ_{acc}. En las siguientes secciones aprenderemos el tratamiento matemático de estos errores.

El error total de una medida es una combinación de los tres tipos de de errores. Naturalmente no se conoce su valor exacto (¡si lo conociesemos dejaría de ser un error!) pero puede y debe ser estimado. Si la magnitud medida es x, llamaremos al error Δx.

3. Modo de expresar los resultados

Una vez que hemos medido una cierta magnitud x y que sabemos que su error es Δx, debemos expresar el resultado como:

$$x = (x_0 \pm \Delta x) \quad [\text{unidades}] \tag{1}$$

donde la medida y el error se dan en las **mismas** unidades.

EJEMPLO

Con una regla se ha medido la altura de una persona. El resultado obtenido es de 1,76 m, y el error cometido es 2 cm. La forma correcta de expresar el resultado de la medida es:

$$\text{altura} = (1{,}76 \pm 0{,}02)\ \text{m}$$

4. Medidas directas

Una medida directa es la que se obtiene de un aparato de medida. A continuación estudiaremos el tratamiento de los errores de este tipo de medidas suponiendo que están libres de errores sistemáticos.

4.1. Error cometido al realizar *una sola* medida de una magnitud

Cuando realizamos una única medida de una magnitud x, el error cometido viene dado únicamente por el **error de precisión**, $\Delta x = \epsilon_p$, del aparato utilizado. Para determinar ϵ_p se distinguen dos casos según el aparato sea analógico o digital.

- Analógico: el error de precisión es la mitad de la división mas pequeña magnitud que puede medir el aparato.

$$\epsilon_p = \text{división más pequeña} \times \ \tfrac{1}{2}$$

  Por ejemplo, el error de precisión de una regla divida en milímetros es de $\varepsilon_p = 0{,}5\,\text{mm}$.

- Digital: El error de precisión es la mínima magnitud que puede medir el aparato.

$$\epsilon_p = \text{mínima} \ \ \text{magnitud} \ \ \text{medible}$$

  Por ejemplo, el error de precisión de un cronómetro digital que permite medir segundos es de $\varepsilon_p = 1\,\text{s}$.

4.2. Error cometido al realizar n medidas de una magnitud

En general, efectuar una única medida de una magnitud es poco fiable. Muchos factores pueden influir en que sea incorrecta, como por ejemplo haber leído mal la escala del aparato, un despiste a la hora de apuntar la medida, etc.

Para evitarlo se debe repetir la medición de la misma magnitud x varias veces. Como resultado obtendremos una serie de valores $x_1, x_2, ..., x_n$, cada uno afectado por el error de precisión ϵ_p. ¿Pero cuál de estos valores es el más fiable?. ¿Con cuál de todos nos quedamos?. La mejor aproximación al verdadero valor de x vendrá dada por la media aritmética ($\overline{x}$) de las n medidas:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{2}$$

El error cometido al aproximar el valor verdadero de x por $\overline{x}$ es el llamado error accidental ϵ_{acc}, que se calcula a partir de la siguiente expresión:

$$\varepsilon_{acc}(\overline{x}) = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + ...(x_n - \overline{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}} \tag{3}$$

Para estimar el error final Δx de nuestras medidas usaremos el máximo entre el error de precisión y el error accidental calculado:

$$\Delta x = \text{máx}(\varepsilon_p, \varepsilon_{acc}) \tag{4}$$

Por tanto el valor más fiable será $\overline{x}$ con un error Δx dado por la ecuación anterior.

EJEMPLO:

Se han realizado con una regla graduada en milímetros 15 *medidas de la longitud L de una barra.*

L (mm)	*L (mm)*	*L (mm)*
15.0	*14.0*	*13.5*
15.5	*15.5*	*15.5*
13.5	*15.0*	*14.0*
14.0	*14.0*	*15.5*
13.0	*14.0*	*14.0*

Hacer la mejor aproximación posible al valor verdadero de L y estimar el error cometido.

Como la regla es un aparato analógico, el error de cada medida es:

$$\Delta L_i = \epsilon_p = \tfrac{1\ \text{mm}}{2} = 0{,}5\ \text{mm}$$

La mejor aproximación al valor verdadero de L es la media aritmética de las medidas.

$$\overline{L} = \frac{\sum_{i=1}^{15} L_i}{15} = 14{,}4\,\text{mm}$$

Para calcular el error accidental de $\overline{L}$, puede ser útil usar una tabla como la que se muestra a continuación:

i	$L_i \pm 0{,}5\,mm$	$L_i - \overline{L}$	$(L_i - \overline{L})^2$
1	15.0	0.6	0.36
2	15.5	1.1	1.21
3	13.5	- 0.9	0.81
4	14.0	- 0.4	0.16
5	13.0	- 1.4	1.96
6	14.0	- 0.4	0.16
7	15.5	1.1	1.21
8	15.0	0.6	0.36
9	14.0	- 0.4	0.16
10	14.0	- 0.4	0.16
11	13.5	- 0.9	0.81
12	15.5	1.1	1.21
13	14.0	- 0.4	0.16
14	15.5	1.1	1.21
15	14.0	- 0.4	0.16
$\sum$	216		10.1

El error accidental se obtiene mediante la ecuación (3):

$$\varepsilon_{acc}(\overline{L}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{15}(L_i - \overline{L})^2}{15}} = 0{,}821\,\mathrm{mm}$$

El error de la medida es:

$$\Delta L = \text{máx}(\varepsilon_p, \varepsilon_{acc}) = \text{máx}(0{,}5, 0{,}821) = 0{,}821\,\mathrm{mm}$$

5. Cifras significativas: Redondeo

Cuando estimamos el error de una medida, el valor obtenido presenta con frecuencia un número arbitrario de cifras. Es evidente que no tiene mucho sentido emplear muchas número de cifras en el error ya que el valor que obtenemos es solo una estimación y es la primera cifra distinta de cero la que determina su magnitud.

En el ejemplo anterior, el error obtenido era $\Delta L = 0{,}821$ mm. La cifra más significativa nos dice que tenemos un error del orden de las décimas de milímetro. Frente a un error de este orden, es indiferente un error de 1 milésima de mm o de 2 centésimas de mm.

El valor del error ΔL indica que la medida $\overline{L}$ no es fiable por debajo de las décimas de mm, por lo que no tiene ningún sentido expresarla con mayor precisión.

Así, se establece que el valor de una medida no puede tener más precisión que la que tiene su error. El procedimiento consiste en redondear en primer lugar el valor del error para que solo tenga una cifra distinta de cero y por tanto determinar el orden de magnitud[1] de la cifra más significativa[2], y en segundo lugar redondear el valor de la medida de acuerdo con el anterior.

Emplearemos los siguientes criterios para redondear el valor de una medida con su error:

1. **El valor de la medida y del error deben expresarse en las mismas unidades.**

2. **En el error sólo debe emplearse una cifra distinta de cero** Por ejemplo, un error de 0,345 s debe escribirse como 0,3 s y un error de 86 kg como 90 kg. Haremos una excepción cuando la cifra más significativa distinta de cero es el 1 y la segunda cifra es menor o igual que 5, en cuyo caso debe mantenerse la cifra que sigue al 1 para expresar el error. Por ejemplo, un error de 0,143 kg se redondea a 0,14 kg.

   Para llegar a estos resultados hemos redondeado los valores de acuerdo a las siguientes reglas:

   a) Si la primera cifra que se suprime es mayor que 5, la última cifra conservada debe aumentarse en 1 unidad. Por ejemplo, si redondeamos 0,861342 s debemos escribir 0,9 s ya que la primera cifra que se suprime es $6 > 5$ con lo que hay que sumar una unidad al 8.

   b) Si la primera cifra que se suprime es menor que 5, la última cifra conservada no varía. Así, 234,38 m redondeado en la cifra más significativa será 200 m.

   c) Si la primera cifra que se suprime es igual a 5, pueden darse dos casos:

      - entre las siguientes cifras suprimidas, hay otras distintas de cero: en este caso, la última cifra conservada se aumenta en 1. Por ejemplo, 35,234 s se redondea a 40 s.

[1]Orden de magnitud de una cifra: Dando un número, el orden de magnitud de una de sus cifras es la potencia de 10 por la que se multiplica esa cifra para obtener el número. Por ejemplo, dado el número $1504 = 1 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 4 \times 10^0$, el orden de magnitud del 1 es tres (o equivalentemente millares), el orden de magnitud de 5 es dos (o centenas), el de 0 es uno (decenas) y el de 4 es cero (unidades)

[2]Cifra más significativa: Es la primera cifra distinta de cero empezando por la izquierda. Así, en el número 2341 la cifra más significativa es el 2

- todas las cifras suprimidas, salvo el 5, son cero: en este caso, la última cifra conservada no varía. Por ejemplo, 35,0000 N se redondea a 30 N.

Estas reglas de redondeo se aplican tanto al valor del error como al de la medida.

3. **El valor de la medida debe tener la misma precisión que el error**. Esto significa que al redondear hay que convertir en cero todas las cifras cuyo orden de magnitud sea inferior al del error. Sin embargo, al contrario que el error, el resultado sí puede tener más de una cifra distinta de cero. Para redondear la medida es necesario haber redondeado antes el error. Así, por ejemplo, si el error es 0,7 kg y el valor de la medida es 25,784535 kg, el resultado final se expresa como: (25,8±0,7) kg. Si el error fuera de 7 kg, el rsultado sería (26±7) kg

Como aplicación de todo lo que acabamos de explicar, vamos a dar los siguientes ejemplos.

EJEMPLO:

Redondear y escribir de acuerdo con los criterios anteriores las siguientes medidas y errores:

Error (m)	Error redondeado (m)	Medida (m)	Resultado final (m)
0.018	0.02	0.987	0,99±0,02
0.068	0.07	25.8251	25,83±0,07
0.072	0.07	25.825	25,82±0,07
0.66	0.7	0.88	0,9±0,7
0.52	0.5	12	12,0±0,5
0.942	0.9	1.867	1,9±0,9
0.987	1	26.97	27±1
11.897	12	356.257	356±12
26	30	364	360±30
340	300	588.6	600±300
370.86	400	25.82	0±400

6. Error absoluto y error relativo: Análisis del error

Hasta ahora hemos estudiado únicamente el denominado **error absoluto** Δx. Para determinar si el error de la medida es grande o no en comparación con ésta, recurrimos al denominado **error relativo**, definido como:

$$\varepsilon_{rel} = \frac{\Delta x}{x} \tag{5}$$

o como:

$$\varepsilon_{rel}\,(\,\%) = \frac{\Delta x}{x} \times 100 \tag{6}$$

si lo expresamos en % .

EJEMPLO:

Supongamos que hemos medido la distancia de la Tierra al Sol (R_{TS}) y de Marte al Sol (R_{MS}), y que los resultados obtenidos son:

$$R_{TS} = (1{,}5 \pm 0{,}4)\,10^8 \text{ km}$$

$$R_{MS} = (22{,}8 \pm 0{,}4)\,10^8 \text{ km}$$

En ambos casos, el error absoluto es el mismo: $0{,}4\,10^8$ km. Sin embargo, el error cometido es mucho más importante en el primer caso (R_{TS}) que en el segundo (R_{MS}), como se pone de manifiesto al calcular el error relativo:

$$\varepsilon_r\,(R_{TS}) = \frac{0{,}4 \times 10^8}{1{,}5 \times 10^8} \times 100 = 27\,\%$$

$$\varepsilon_r\,(R_{MS}) = \frac{0{,}4 \times 10^8}{22{,}8 \times 10^8} \times 100 = 2\,\%$$

7. Medidas indirectas

Es frecuente que nos encontremos en el laboratorio con magnitudes que no podemos medir directamente con el aparato de medida, sino que deben determinarse de forma indirecta a partir otras magnitudes que se han medido directamente en el laboratorio. En este caso se dice que **la medida es indirecta**. Por ejemplo, una medida indirecta es la superficie de un rectángulo a partir de la medida en el laboratorio de las longitudes de sus lados.

El error de la medida indirecta es función de los errores de las medidas directas que utilizamos para su calculo. El método para calcular este error se conoce como propagación de errores.

7.1. Propagación de errores

Supongamos que queremos calcular el valor de una magnitud y que es función de una serie de magnitudes $x_1, x_2, ..., x_n$, cuyos valores se pueden obtener de una manera directa en el laboratorio, es decir que:

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{7}$$

En primer lugar calcularemos los correspondientes $\overline{x}_i \pm \Delta x_i$ tal y como ya se ha descrito en anteriores apartados. La mejor estimación de y se obtiene sustituyendo en la expresión (7) los valores obtenidos de $\overline{x}_i$:

$$\overline{y} = f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n) \tag{8}$$

Para estimar el error de $\overline{y}$ podemos usar la **regla de las derivadas parciales** o **la regla del neperiano**, que describiremos a continuación.

7.1.1. Regla de las derivadas parciales

Si suponemos que el error Δx_i de las variables x_i es suficientemente pequeño, puede demostrarse que el error $\Delta\overline{y}$ viene dado aproximadamente por:

$$\Delta\overline{y} = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\overline{x}_i} \Delta x_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{\overline{x}_i} \Delta x_2 + ... + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{\overline{x}_i} \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\overline{x}_i} \Delta x_i \tag{9}$$

Obsérvese que todos los términos de (9) deben tomarse en valor absoluto; los Δx_i se consideran positivos.

NOTA: $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ es la **derivada parcial** de f respecto a la variable x_i; esto significa derivar la función f respecto x_i tratando las demás variables como si fueran constantes (ver ejemplos). El subíndice $\overline{x}_i$ que aparece junto a las derivadas parciales indica que una vez realizada la derivada parcial deben sustituirse en el resultado los correspondientes valores de $\overline{x}_i$ (cuando sólo se haya realizado una medida de la variables x_i, $\overline{x}_i$ es simplemente el valor medido de x_i).

EJEMPLO:

Si una magnitud física y está determinada por la ecuación: $y = a_1x_1 - a_2x_2$, donde a_1 y a_2 son constantes sin error, y los errores de x_1 y x_2 son Δx_1 y Δx_2 respectivamente, calcular la expresión del error de y.

Solución:

$$\begin{array}{l}\text{Las derivadas parciales son :}\\ \dfrac{\partial y}{\partial x_1} = a_1, \qquad \dfrac{\partial y}{\partial x_2} = -a_2\\ \\ \text{por tanto :}\\ \Delta y = |a_1|\,\Delta x_1 + |a_2|\,\Delta x_2\end{array}$$

EJEMPLO:

Si una magnitud física y está determinada por la ecuación: $y = x_1^n \cdot x_2^m$, donde m y n son constantes sin error, y x_1 y x_2 tienen de errores Δx_1 y Δx_2 respectivamente, calcular la expresión del error de y.

Solución:

$$\begin{array}{l}\text{Las derivadas parciales son :}\\ \dfrac{\partial y}{\partial x_1} = n x_1^{n-1} x_2^m, \qquad \dfrac{\partial y}{\partial x_2} = m x_2^{m-1} x_1^n\\ \\ \text{por tanto :}\\ \Delta y = |n x_1^{n-1} x_2^m| \Delta x_1 + |m x_2^{m-1} x_1^n| \Delta x_2\end{array}$$

EJEMPLO:

Supongamos que se ha medido el diámetro de una esfera con una precisión de 1 cm: $D = 150 \pm 1\,\mathrm{cm}$. Calcular el área (A) y el volumen (V) de la esfera.

La superficie y el volumen de la esfera están dados por:

$$\begin{aligned} A &= 4\pi R^2 \\ V &= \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$

El radio R será $R = \frac{D}{2} = 75\,\mathrm{cm}$ y por tanto: $\Delta R = \frac{\Delta D}{2} = 0{,}5\,\mathrm{cm}$. Por tanto: $R = 75{,}0 \pm 0{,}5\,\mathrm{cm}$. Para el área y el volumen se tendrá:

$$\begin{aligned} A &= 4\pi R^2 = 70685{,}8\,\mathrm{cm}^2 \\ \Delta A &= \left|\frac{\partial A}{\partial R}\right| \Delta R = 8\pi R\,\Delta R = 942{,}5\,\mathrm{cm}^2 \end{aligned}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 1767145{,}9\,\text{cm}^3$$
$$\Delta V = \left|\frac{\partial V}{\partial R}\right| \Delta R = 4\pi R^2\,\Delta R = 35342{,}9\,\text{cm}^3$$

Los resultados finales serán:

$$A = 70700 \pm 900 = (70{,}7 \pm 0{,}9)\,10^3\ \text{cm}^2$$
$$V = 1770000 \pm 40000 = (17{,}7 \pm 0{,}4)\,10^5\ \text{cm}^3$$

EJEMPLO:

Se han realizado 5 medidas de cada una de las resistencias R_1 y R_2: R_1 = 9.5, 9.8, 10.2, 9.9, 10.1 Ω (ohmios); R_2 = 15.5, 15.2, 14.8, 15.2, 15.0 Ω. La precisión de cada medida individual es de 0.1 Ω. Hallar el mejor valor de R_1 y R_2, y estimar el error correspondiente. Si se conectan en paralelo, ¿cuál será la resistencia equivalente del circuito?.

Podemos construir las siguientes tablas para las medidas de R_1 y R_2.

i	$R_{1i} \pm 0{,}1\,\Omega$	$R_{1i} - \overline{R_1}$	$(R_{1i} - \overline{R_1})^2$
1	9.5	- 0.4	0.16
2	9.8	- 0.1	0.01
3	10.2	0.3	0.09
4	9.9	0.0	0.00
5	10.1	0.2	0.04
$\sum$	49.5		0.30

i	$R_{2i} \pm 0{,}1\,\Omega$	$R_{2i} - \overline{R_2}$	$(R_{2i} - \overline{R_2})^2$
1	15.5	0.36	0.1296
2	15.2	0.06	0.0036
3	14.8	- 0.34	0.1156
4	15.2	0.06	0.0036
5	15.0	- 0.14	0.0196
$\sum$	75.7		0.272

Los valores medios de R_1 y R_2 son:

$$\begin{aligned}
\overline{R_1} &= \frac{\sum R_{1i}}{5} = 9{,}9\,\Omega \\
\overline{R_2} &= \frac{\sum R_{2i}}{5} = 15{,}14\,\Omega
\end{aligned}$$

El error accidental:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{acc}(\overline{R_1}) &= \sqrt{\frac{\sum(R_{1i}-\overline{R_1})^2}{5}} = 0{,}24\,\Omega \\
\varepsilon_{acc}(\overline{R_2}) &= \sqrt{\frac{\sum(R_{2i}-\overline{R_2})^2}{5}} = 0{,}23\,\Omega \qquad (10)
\end{aligned}$$

El error total y el resultado:

$$\begin{aligned}
\Delta\overline{R_1} &= \text{máx}(\varepsilon_p(R_1), \varepsilon_{acc}(\overline{R_1})) = \text{máx}(0{,}1, 0{,}24) = 0{,}24\,\Omega \\
R_1 &= 9{,}9 \pm 0{,}2\,\Omega \qquad (11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\overline{R_2} &= \text{máx}(\varepsilon_p(R_2), \varepsilon_{acc}(\overline{R_2})) = \text{máx}(0{,}1, 0{,}23) = 0{,}23\,\Omega \\
R_2 &= 15{,}1 \pm 0{,}2\,\Omega \qquad (12)
\end{aligned}$$

Como las resistencias están en paralelo, la resistencia equivalente será:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Longrightarrow R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

y el mejor valor de R_{eq} se obtendrá sustituyendo R_1 y R_2 por los correspondientes valores medios $\overline{R_1}$ y $\overline{R_2}$ anteriormente calculados[3]:

$$\overline{R_{eq}} = \frac{\overline{R_1 R_2}}{\overline{R_1} + \overline{R_2}} = 5{,}986\,\Omega$$

$$\begin{aligned}
\Delta\overline{R_{eq}} &= \left|\frac{\partial R_{eq}}{\partial R_1}\right| \Delta\overline{R_1} + \left|\frac{\partial R_{eq}}{\partial R_2}\right| \Delta\overline{R_2} \\
&= \frac{\overline{R_2}^2}{(\overline{R_1}+\overline{R_2})^2}\Delta\overline{R_1} + \frac{\overline{R_1}^2}{(\overline{R_1}+\overline{R_2})^2}\Delta\overline{R_2} = 0{,}104\,\Omega \qquad (13)
\end{aligned}$$

[3]Aquí hay que introducir los valores *sin redondear*; el redondeo se hace siempre al final

donde se han sustituido los correspondientes valores medios $\overline{R_1}$, $\overline{R_2}$. El resultado final será:

$$R_{eq} = 6{,}0 \, \pm \, 0{,}1 \, \Omega$$

7.1.2. Regla del neperiano

La regla de las derivadas parciales es válida siempre. Sin embargo, cuando la función f solo tiene productos, divisiones o potencias (o es una combinación de estas operaciones), una forma alternativa de calcular el error de y es proceder de la siguiente forma:

1. Se determina el logaritmo neperiano de los dos miembros de la ecuación $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$:

$$\ln y = \ln f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{14}$$

2. Se toman diferenciales de ambos miembros de la ecuación anterior.

3. Se identifican los elementos diferenciales con los errores de las variables $(dy \rightarrow \Delta y, \ dx_i \rightarrow \Delta x)$, y se sustituyen los valores correspondientes de y y x_i (ó $\overline{y}$ y $\overline{x}_i$) en la expresión final:

EJEMPLO

Si una magnitud física y se determina mediante la siguiente ecuación

$$y = \frac{x_1 x_2^n}{x_3}$$

a partir de las medidad directas $(x_1 \pm \Delta x_1)$, $(x_2 \pm \Delta x_2)$, y $(x_3 \pm \Delta x_3)$, determinar el error propagado de y.

1. Tomamos logaritmos neperianos en ambos lados de la ecuación

$$\ln y = \ln x_1 + n \ln x_2 - \ln(x_3)$$

2. Derivamos

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx_1}{x_1} + n\frac{dx_2}{x_2} - \frac{dx_3}{x_3}$$

3. Identificamos los elementos diferenciales con errores, **cambiando el signo de aquellos que lo presenten negativo**

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta x_1}{x_1} + n\frac{\Delta x_2}{x_2} + \frac{\Delta x_3}{x_3}$$

   Finalmente, el error es:

$$\Delta y = \left\{ \frac{\Delta x_1}{|x_1|} + n\frac{\Delta x_2}{|x_2|} + \frac{\Delta x_3}{|x_3|} \right\} y$$

NOTA: No aplicar la regla del neperiano cuando en y aparezcan funciones distintas de productos, divisiones o potencias (como por ejemplo funciones seno, coseno, logaritmos, etc).

8. Leyes físicas: Análisis de la dependencia entre variables.

Muchas leyes físicas establen la dependencia de un variable en función de otra. Por ejemplo la relación entre la velocidad y la aceleración de un movil sometido a la fuerza de la gravedad:

$$v(t) = v_0 + g \times t \tag{15}$$

establece una relación lineal entre v y t donde v_0 y g son los coeficientes de dicha relación.

Una ley física es válida si al realizar la medidas experimentales de una de las variables en función de la otra se comprueba que siguen la relación matemática predicha por la ley física. En nuestro ejemplo, deberíamos medir la velocidad $v(t_i)$ del móvil en distintos instantes de tiempo t_i, para luego comprobar si es cierta la relación lineal del ley enunciada en la ecuación (15). Si se cumple esta relación lineal podemos determinar tanto el valor de v_0 como el de g a partir de los datos experimentales.

A continuación se explican dos métodos que permiten comprobar las relaciones de proporcionalidad entre dos variable y obtener el valor de los coeficientes de proporcionalidad.

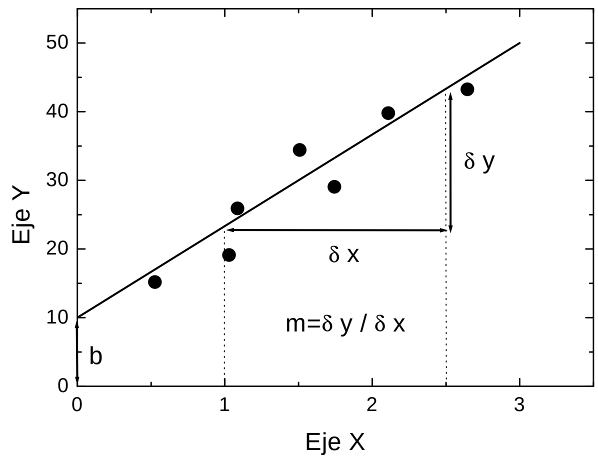


Figura 1: Ajuste lineal: m es la pendiente de la recta y b la ordenada en el origen.

8.1. Método gráfico

Cuando una cantidad y es linealmente proporcional a otra x, al representar gráficamente una frente a la otra se obtiene una línea recta. La ecuación general de una recta de variables x e y es:

$$y = mx + b \tag{16}$$

donde m es la pendiente de la recta y b su ordenada en el origen.

Por tanto si los datos que hemos recogido en el laboratorio se supone que siguen una relación lineal, al representarlos gráficamente obtendremos una nube de puntos que aproximadamente determinan una recta, como se muestra en la figura.1.

Si trazamos *a ojo* la recta que parece ajustar mejor a los puntos experimentales representados, podemos obtener el valor numérico de m y b tal y como se muestra en la figura.1 . Es importante darse cuenta que las unidades de m y b son:

$$[m] = \frac{[y]}{[x]} \quad , \quad [b] = [y] \tag{17}$$

Si al representar los puntos experimentales se *ve* que no siguen una relación lineal se puede afirmar que la relación entre x e y no es lineal. Con lo que no tiene sentido calcular m y b.

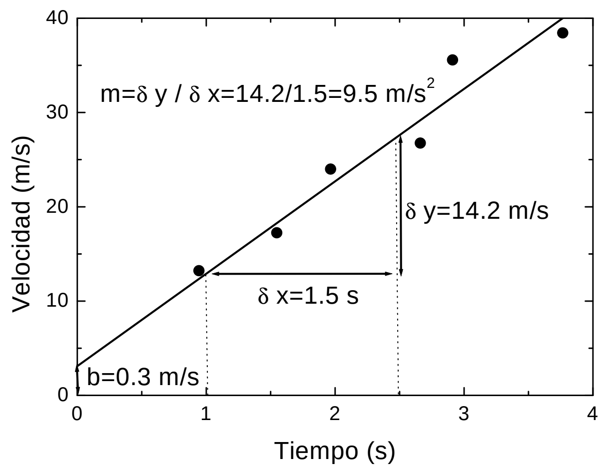


Figura 2: Ver ejemplo en el texto.

En el ejemplo propuesto, como resultado de las medidas del laboratorio obtendríamos una serie de parejas de valores de $v(t_i)$ y t_i. Si las medidas obtenidas son:

tiempo t (s)	Velocidad $v(t)$ (m/s)
0.94	13.21
1.58	17.23
1.96	23.99
2.66	26.74
2.91	35.57
3.76	38.43

Cuya representación gráfica es la figura.2 .

Se observa que los puntos experimentales se distribuyen siguiendo un línea recta como predice la ley física descrita por la ecuación 15. Es importante fijarse que dicha ecuación es la de una recta donde $x \rightarrow t$ y $y \rightarrow v(t)$, con lo que se pueden identificar $m \rightarrow g$ y $b \rightarrow v_0$.

Aplicando el método gráfico descrito anteriormente se obtienen: $m = g = 9{,}5\ \mathrm{m/s^2}$ y $b = v_0 = 3$ m/s.

8.2. Método de Mínimos Cuadrados

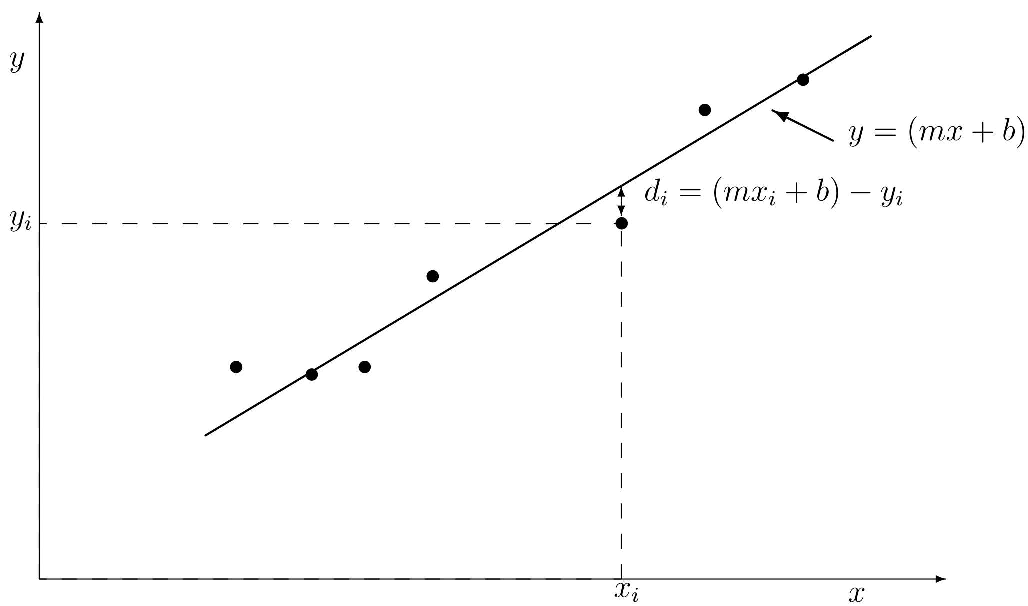
El método gráfico es sencillo pero poco riguroso. Un método de fácil utilización es el llamado **método de mínimos cuadrados**.

Sea la ecuación de una recta:

$$y = m\,x + b \tag{18}$$

El método de mínimos cuadrados da como mejor estimación de los parámetros m (**pendiente de la recta**) y b (**ordenada en el origen**) aquéllos que minimizan la suma de los cuadrados de las distancias de los puntos experimentales a la recta. Es decir, si los puntos experimentales son $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$, el mejor ajuste será para los valores de m y b que cumplan:

$$\sum (mx_i + b - y_i)^2 = \text{mínimo} \tag{19}$$



Se demuestra que el par de valores m y b que cumplen esta condición son la solución del sistema de ecuaciones :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \sum y_i & = & m \sum x_i + bn \\ \sum x_i y_i & = & m \sum x_i^2 + b \sum x_i \end{array} \right. \tag{20}$$

que podemos escribir

$$m \;=\; \frac{\begin{vmatrix} \sum y_i & n \\ \sum x_i y_i & \sum x_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum x_i & n \\ \sum x_i^2 & \sum x_i \end{vmatrix}} = \frac{\sum y_i \sum x_i - n \sum x_i y_i}{(\sum x_i)^2 - n \sum x_i^2} \tag{21}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} \sum x_i & \sum y_i \\ \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum x_i & n \\ \sum x_i^2 & \sum x_i \end{vmatrix}} = \frac{\sum x_i \sum x_i y_i - \sum y_i \sum x_i^2}{(\sum x_i)^2 - n \sum x_i^2} \tag{22}$$

Como magnitudes dependientes de cantidades medidas, m y b poseen sus propios errores (Δm, Δb) que se pueden estimar mediante las siguientes relaciones en las que se ha supuesto que sólo las y_i tienen error, y todas el mismo. Es decir $\Delta(x_i) = 0 \quad \forall x_i$, y $\Delta(y_i) = \sigma \quad \forall y_i$. Si los errores σ_{y_i} no son iguales para $\forall\, y_i$ utilizaremos la aproximación de sustituir dichos errores por la media $\sigma = \overline{\sigma}_y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sigma_{y_i}$.

$$\Delta m = \sqrt{\frac{n\sigma^2}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}} \tag{23}$$

$$\Delta b = \sqrt{\frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}} \tag{24}$$

Antes de aplicar el método de mínimos cuadrados conviene haber hecho la representación gráfica de los datos y observar que la relación entre variables es aproximadamente lineal. *Si no lo es* el método no es aplicable (ver sección 8.3).

Por último, al realizar los calculos necesarios para obterner un ajuste por mínimos cuadrados es necesari usar todos los decimales que se obtengan de la calculadora. Solo al final se procederá a redondear los números.

EJEMPLO:

Si aplicamos este método al ejemplo del apartado anterior se tiene que $y = v(t)$, $x = t$, $m = g$ y $b = v_0$. Es útil construirse la siguiente tabla:

$x = t$ (s)	$y = v$ (m/s)	xy	x^2
0.94	13.21	12.4174	0.8836
1.58	17.23	27.2234	2.4964
1.96	23.99	47.0204	3.8416
2.66	26.74	71.1284	7.0756
2.91	35.57	103.5087	8.4681
3.76	38.43	144.4968	14.1376
$\sum x = 13{,}81$	$\sum y = 155{,}17$	$\sum x_i y_i = 405{,}79$	$\sum x_i^2 = 36{,}90$

Lo que conduce al resultado:

$$m = g = 9{,}506858 \quad m/s^2 \quad , \quad b = v_0 = 3{,}980048\, m/s \tag{25}$$

Si los errores experimentales de $v(t)$ y t eran $\Delta v = 0{,}02$ m/s y $\Delta t = 0{,}9$ s, aplicando las ecuaciones para estimar Δm y Δb (y recordando que $\sigma = 0{,}9$ s) se tiene:

$$\Delta m = \Delta g = 0{,}397869 \quad m/s^2 \quad , \quad \Delta b = \Delta v_0 = 0{,}986721\, m/s \tag{26}$$

Por tanto, los resultados finales tras redondear:

$$g = (9{,}5 \pm 0{,}4) \quad m/s^2 \quad , \quad v_0 = (4{,}0 \pm 1{,}0)\, m/s \tag{27}$$

Se comprueba que el valor obtenido para la gravedad mediante el ajuste coincide dentro del error con el aceptado de 9,8 m/s^2.

EJEMPLO:

Se desea medir la resistencia en la rama de un circuito, para lo cual se miden distintos pares de valores de la diferencia de potencial y de la intensidad del circuito. Se obtienen los siguientes valores:

V (V)	I (A)
21 ± 1	20 ± 1
29 ± 1	30 ± 1
39 ± 1	40 ± 1
55 ± 2	50 ± 1
59 ± 2	60 ± 1

Sabemos que $V = IR$. Sin embargo, ajustamos R por el método de mínimos cuadrados suponiendo la relación

$$V = RI + b \tag{28}$$

Se obtiene:

$y = V$	$x = I$	xy	x^2
21	20	420	400
29	30	870	900
39	40	1560	1600
55	50	2750	2500
59	60	3540	3600
$\sum y_i = 203$	$\sum x_i = 200$	$\sum x_i y_i = 9140$	$\sum x_i^2 = 9000$

Llegando al resultado

$$m = R = 1{,}02\,\Omega, \qquad b = -0{,}2\,V \tag{29}$$

Para calcular los errores m y b hallamos primero σ

$$\sigma = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma_{y_i} = 1{,}4\,V \tag{30}$$

y usamos las expresiones (23) y (24). Se obtiene así:

$$\begin{aligned} \Delta m &= 0{,}0443\,\Omega \\ \Delta b &= 1{,}878\,V \end{aligned}$$

Finalmente, los resultados son:

$$\begin{aligned} m &= R = (1{,}02 \pm 0{,}04)\ \Omega \\ b &= (0 \pm 2)\ V \end{aligned}$$

Observese que la ordenada en el origen es cero dentro de los errores experimentales, como cabía esperar, ya que $V = RI$, y por tanto b debe ser cero ($V = RI + b$).

8.3. Linealización de ecuaciones

Tanto el método gráfico como el de mínimos cuadrados solo se pueden aplicar cuando la relación entre las dos variables es lineal. Existen múltiples casos en los que la ley física esta descrita por una relación no lineal. Por ejemplo la relación entre el espacio recorrido por un móvil y el tiempo en un movimiento uniformemente acelerado con velocidad inicial cero:

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 \tag{31}$$

donde a es la aceleración.

En estos casos es posible linealizar dicha ecuación para que tenga la forma de una recta $y = mx + b$. Existen dos métodos:

- Cambio de variable: consiste en realizar un cambio de variable de forma que obtengamos la ecuación de una recta. En nuestro ejemplo, si realizamos el cambio:

$$t^2 \rightarrow x \quad , \quad s \rightarrow y$$

nos queda la ecuación:

$$y = \frac{1}{2}ax$$

y comparando con la ecuación de una recta nos queda que:

$$m \rightarrow \frac{1}{2}a \quad , \quad b \rightarrow 0$$

Despejando de esta ecuación obtenemos el valor de a:

$$a = 2m$$

- Uso de logaritmos:[4] consiste en tomar logaritmos en la expresión matemática y utilizar las propiedades de éstos para linealizar la expresión. Por ejemplo, si tomamos logaritmos nos queda en el caso anterior:

  $$log(s) = log(\frac{1}{2}at^2)$$

  Al aplicar las propiedades de los logaritmos[5] se puede escribir como:

  $$log(s) = log(\frac{1}{2}a) + 2\ log(t)$$

  Si realizamos el cambio de variable:

  $$x \rightarrow log(t) \quad , \quad y \rightarrow log(s)$$

  nos queda la ecuación lineal:

  $$y = log(\frac{1}{2}a) + 2x$$

  y por tanto:

  $$m \rightarrow 2 \quad , \quad b \rightarrow log(\frac{1}{2}a)$$

[4] Este método solo se debe aplicar cuando la ecuación solo presente productos, divisiones y potencias

[5] Los logaritmos cumplem: $log(A \times B) = log(A) + Log(B)$, $Log(A/B) = Log(A) - Log(B)$ y $Log(A^B) = B\ \ Log(A)$.

De aquí podemos despejar el valor de a, que en caso de haber usado logaritmos neperianos queda:

$$a = 2\, e^{b}$$

Uuna vez linealizada la ecuación, se debe construir una nueva tabla de datos con las nuevas variables linealizadas y utilizar éstas para el calculo de m y b. La representación gráfica de x frente a y debe aproximarse por una recta.

Por ejemplo, en el caso de haber usado logaritmos construiríamos la tabla:

x	y
$log(t_1)$	$log(s_1)$
$log(t_2)$	$log(s_2)$
$\vdots$	$\vdots$
$log(t_n)$	$log(s_n)$

9. Gráficas

9.1. Normas Generales

Una de las formas más útiles de presentar resultados experimentales es en forma de gráficas. Conviene tener presentes algunos puntos para aprovechar al máximo sus ventajas:

- Los puntos experimentales deben ser claramente visibles.
- Las escalas deben elegirse de forma que los puntos queden lo más espaciados posible. Para ello las escalas vertical y horizontal pueden ser diferentes si es necesario, y el origen de la gráfica no tiene por qué ser el punto $(0, 0)$.
- Los ejes deben marcarse a intervalos regulares, no para cada punto. Debe elegirse una escala cómoda, usando factores que faciliten el cálculo (2, 5, 10, ...).
- Cuando se representan los puntos experimentales se deben representar también sus errores. Esto se realiza por medio de las barras de error. El método consiste en trazar una cruz con centro en el dato experimental en la que la longitud de los brazos de la cruz a lo largo del eje x sea igual a Δx, y la longitud del brazos de la cruz a lo largo del eje y sea igual a Δy.

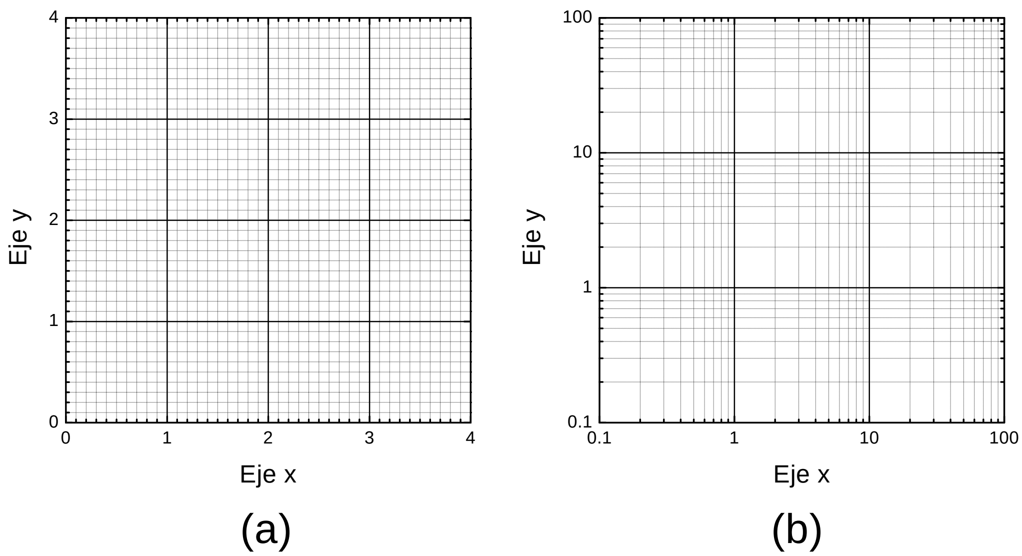


Figura 3: (a) Papel milimetrado. (b) Papel logarítmico.

- Deben figurar las unidades en cada eje.
- Si los puntos experimentales se ajustan con una cierta curva, se debe trazar ésta **de forma continua**, no poligonal (ver por ejemplo la figura 1.
- En el caso de que los puntos experimentales hayan sido ajustados a una recta por mínimos cuadrados, se debe dibujar dicha recta junto con los puntos experimentales.

9.2. Papeles milimetrado, logarítmico y semilogarítmico

El uso de papel milímetrado (ver figura 3a) facilita la realización de la gráficas. Cuando se marcan los intervalos en un eje milimetrado, la distancia entre puntos es proporcional a la diferencia entre valores. Por ejemplo, si se representan 3 valores $x_1 = 1$, $x_2 = 10$, y $x_3 = 100$ mediante los puntos P_1, P_2, y P_3, la distancia entre P_1 y P_2 será proporcional $x_2 - x_1 = 9$, y la distancia entre P_2 y P_3 será proporcional a $x_3 - x_2 = 90$.

Existe otro tipo de papel, llamado *logarítmico* (ver figura 3b), en el que la distancia entre puntos es proporcional a la diferencia entre los logaritmos de los valores. En un eje logarítmico, la distancia entre P_1 y P_2 será proporcinal a $Log(x_2) - Log(x_1) = 1 - 0 = 1$, y la distancia entre P_3 y P_2 será proporcional a $Log(x_3) - Log(x_2) = 2 - 1 = 1$. De este modo el propio papel efectúa la transformación a logaritmos, lo que representa una ventaja en muchos casos.

Esta transformación puede ser en los dos ejes (logarítmico) o en uno solo (semilogarítmico). Representar $\log y$ en función de $\log x$ en papel milimetrado normal, equivale a representar y en función de x en papel logarítmico. Análogamente una representación $\log y$ frente a x equivale a representar y frente a x en papel semilogarítmico (correspondiendo a la y la escala logarítmica).

10. Bibliografía

- .$^{\text{A}}$nálisis de errores". C. Sánchez del Río. EUDEMA, 1989
- "Statistics". R. J. Barlow. John Wiley and Sons, 1989