II SEMINARIO
"METROLOGIA: LA CIENCIA DE LA MEDICION, SUS PRINCIPIOS Y APLICACIONES " INCERTIDUMBRE EN MEDICION *U*

SNM
Servicio Nacional de Metrología

Edwin Guillén

Diciembre del 2013

INCERTIDUMBRE EN LA MEDICIÓN

- No es posible hacer mediciones absolutamente exactas de las magnitudes físicas o químicas(masa, longitud, temperatura, cantidad de sustancia, etc.)
- Por consiguiente toda medición de alguna magnitud física o química tiene un margen de duda.
- La incertidumbre de medición es el valor de ese margen de duda.
- Si ese margen de duda es muy pequeño la incertidumbre es también muy pequeña. Si ese margen de duda es grande la incertidumbre correspondientemente es también grande.

- En este mundo globalizado donde el comercio internacional es cada vez mas grande, la competencia por la calidad es cada vez mayor. Vender productos cada vez mejores (y a mejores precios) es lo que determina la supervivencia o la muerte de muchas industrias.
- La calidad se establece haciendo mediciones de las características de los productos. El proceso de producción se controla midiendo diversas magnitudes físicas o químicas claves.
- Así la calidad se establece a través de mediciones, pero es indispensable que las mediciones también sean de calidad.

- La calidad de la medición la establece justamente la Incertidumbre.

- Si la Incertidumbre es:

1) Bien calculada y
2) Es suficientemente pequeña

podemos decir que la medición es de buena calidad .

Documentos Guías Fundamentales

- JCGM 100:2008. Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement; First edition; 2008. GUM Disponible en: http://www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_100_2008_E.pdf
- Versión para Perú: "Guía para la Expresión de la Incertidumbre en la Medición" 2001; INDECOPI/SNM
- JCGM 100:2008 ; Evaluación de datos de medición – Guía para la expresión de la incertidumbre de medida; edición digital 1 en español (traducción 1ª Ed. Sept 2008) Primera Edición septiembre 2008 (original en inglés) Centro Español de Metrología CEM. Disponible en:

http://www.cem.es/sites/default/files/gum20digital1202010.pdf

Documentos Guías Fundamentales

- Publication reference EA 4/02 M:1999; Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration; European Cooperation for Accreditation; December 1999, rev 00. Disponible en:

http://www.european-accreditation.org/publication/ea-4-02-m

- EURACHEM/CITAC Guide CG4; Quantifying Uncertainty in Analytical Measurement; Third edition; QUAM:2012.P1. Disponible en:

http://www.eurachem.org/images/stories/Guides/pdf/QUAM2012_P1.pdf

Enlaces a Internet

- ISO International Standards Organization : www.iso.org
- BIPM Bureau International des Poids et Mesures : www.bipm.org
- OIML International Organization of Legal Metrology: www.oiml.org
- IUPAP International Union of Pure and Applied Physics: www.iupap.org
- IUPAC International Union of Pure and Applied Chemistry : www.iupac.org
- IFCC International Federation of Clinical Chemistry and Laboratory Medicine : www.ifcc.org
- IEC International Electrotechnical Commission : www.iec.ch

- EURACHEM ; A Focus for Analytical Chemistry in Europe : www.eurachem.org
- EAL European Co-operation for Accreditation: www.european-accreditation.org
- ILAC ; International Laboratory Accreditation Cooperation

www.ilac.org

1. OBJETIVO Y ALCANCE

- Establecer reglas generales para evaluar y expresar la Incertidumbre en mediciones efectuadas en todos los niveles de exactitud y en muchos campos desde el taller, la industria, los laboratorios y la investigación técnica y científica fundamental .

- En base a la ISO-GUM se han desarrollado otros documentos específicos para ciertos campos, tal como se ve en la sección Documentos Guías Fundamentales.

Ejemplos:

- *Para Metrología*:

Publication reference EA 4/02 M:1999; Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration; European Cooperation for Accreditation; December 1999, rev 00 .

- *Para Química analítica cuantitativa*:

EURACHEM/CITAC Guide CG4; Quantifying Uncertainty in Analytical Measurement; Third edition; QUAM:2012.P1.

- En Metrología y Química se asume que al efectuar mediciones existe un control y aseguramiento efectivos de la calidad de modo que los procesos de medición sean estables y bajo control estadístico tanto como sea posible.

Tales cuidados incluyen:

- Personal calificado apropiadamente capacitado.
- Apropiado mantenimiento y calibración de los equipos, instrumentos de medición, reactivos, etc
- Uso de apropiados patrones de referencia.
- Procedimientos documentados de medición técnicamente válidos.
- Uso de apropiados patrones de verificación y cartas de control.

Se asume así que los procedimientos y métodos

ESTAN DOCUMENTADOS

- La evaluación seriamente documentada de Incertidumbre puede hacerse sólo para las mediciones hechas bajo tales métodos y procedimientos.
- La Norma ISO 17025 establece los requisitos técnicos que debe cumplir un laboratorio para que se le reconozca como técnicamente competente para una labor dada.

Capítulo 2. DEFINICIONES

DEFINICIONES PREVIAS

Mensurando (VIM **2.3**)

magnitud que se desea medir

NOTA La **medición**, incluyendo el **sistema de medición** y las condiciones bajo las cuales se realiza ésta, podría alterar el fenómeno, cuerpo o sustancia, de tal forma que la magnitud que se está midiendo puede diferir del **mensurando** tal como ha sido definido. En este caso sería necesario efectuar una **corrección** apropiada.

principio de medición (VIM 2.4)

fenómeno que sirve como base de una **medición**

EJEMPLO El efecto termoeléctrico aplicado a la medición de temperatura.

método de medición (VIM 2.5)

descripción genérica de la secuencia lógica de operaciones utilizadas en una **medición.**

NOTA Los métodos de medición pueden clasificarse de varias maneras como:

- métodos directos y
- métodos indirectos

Otra clasificación:

* método de sustitución,
* método diferencial,
* método de cero;

procedimiento de medición (VIM 2.6)

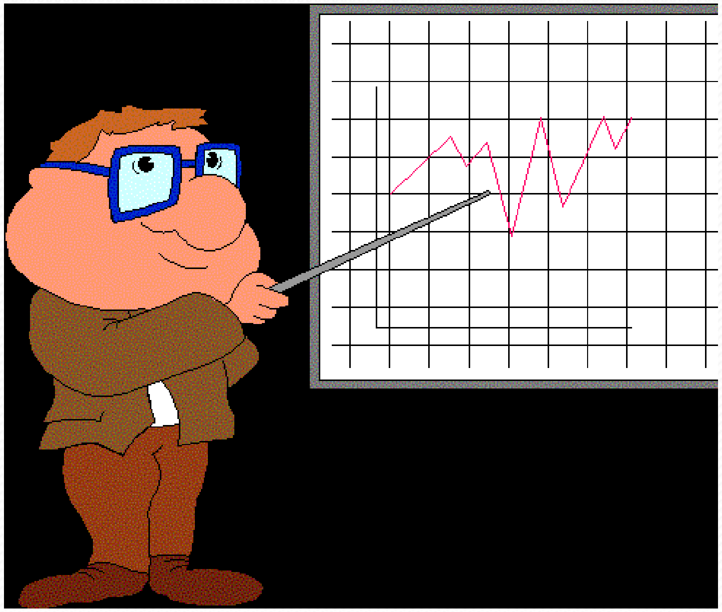
descripción detallada de una **medición** conforme a uno o más **principios de medición** y a un **método de medición** dado, basado en un **modelo de medición** y que incluye los cálculos necesarios para obtener un **resultado de medición**

NOTA 1 Un procedimiento de medición se documenta habitualmente con suficiente detalle para que un operador pueda realizar una medición.

NOTA 3 El procedimiento de medición a veces se denomina *standard operating procedure* (SOP) en inglés, o *mode opératoire de mesure* en francés.

resultado de medición (VIM 2.9)

conjunto de **valores de una magnitud** atribuidos a un **mensurando,** acompañados de cualquier otra información relevante disponible.



NOTA 1

Para un mensurando ***Y*** el resultado de una medición puede expresarse como :

$$Y = y \pm U$$

Que se interpreta diciendo que el mejor estimado de ***Y*** es ***y*** .

El intervalo desde ***y-U*** hasta ***y+U*** abarca una fracción **suficientemente** grande de los valores que razonablemente pueden atribuirse a ***Y***

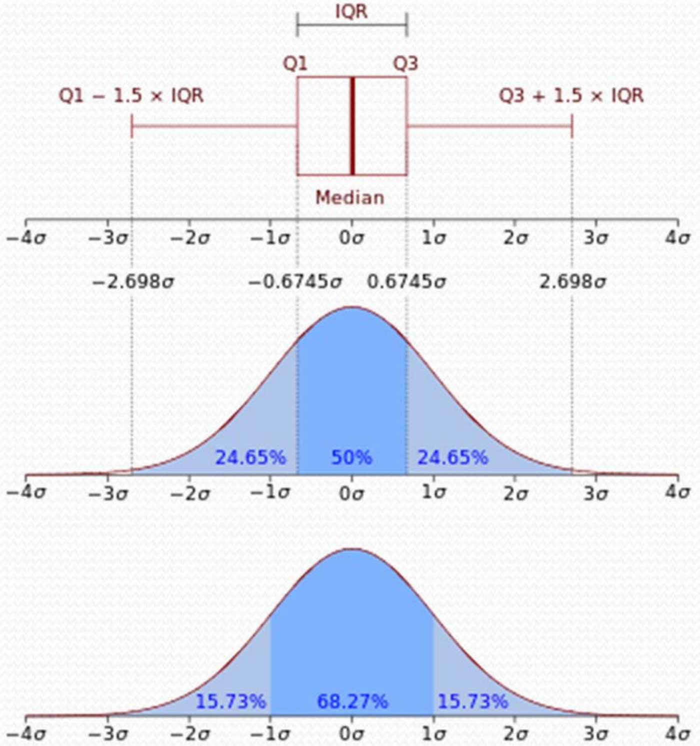
La fracción suficientemente grande de los valores que razonablemente pueden atribuirse a ***Y*** se denota como ***p*** y se le llama la probabilidad de cobertura o "Nivel de Confianza" del intervalo.

Si la incertidumbre de medición calculada se considerara despreciable para un determinado fin entonces el resultado de medición podría expresarse como un único valor medido de la magnitud.

En muchos campos ésta es la forma habitual de expresar el resultado de medición.

Un resultado de medición contiene generalmente información relevante sobre el conjunto de valores de una magnitud de modo que algunos de ellos pueden ser más representativos del mensurando que otros.

Esto puede expresarse como una función de densidad de probabilidad (FDP).



Toda medición empieza por definir que es lo que se quiere medir .

Dependiendo de la exactitud que se quiere alcanzar en la medición la definición tiene que dar mayores detalles del mensurando.

El enfoque basado en el concepto de Incertidumbre, consiste en reconocer que, debido a la inherentemente incompleta cantidad de detalles en la definición de una magnitud, no existe un único valor verdadero compatible con la definición, sino más bien un conjunto de valores verdaderos compatibles con ella. En general entre menor sea la cantidad de detalles dados en la definición dicho conjunto de valores verdaderos compatibles con ellas es más grande.

Sin embargo, este conjunto de valores es, en principio y en la práctica, imposible de conocer con perfección absoluta.

valor verdadero de una magnitud, (VIM 2.11)

valor de una magnitud perfectamente compatible con la definición de la magnitud

- NOTA 1 En el enfoque basado en el concepto de Error, el valor verdadero de la magnitud se considera único pero en la práctica, imposible de conocer.

Otros enfoques no contemplan el concepto de valor verdadero de una magnitud y se apoyan más bien en el concepto de **compatibilidad metrológica de resultados de medición para evaluar la validez** de los resultados de medición.

Cuando la **incertidumbre debida a la definición** del **mensurando** sea despreciable con respecto a las otras componentes de la **incertidumbre de medición**, puede considerarse que el mensurando tiene un valor verdadero "esencialmente único dentro de la pequeña incertidumbre debida a la definición del mensurando ".

valor convencional de una magnitud (VIM 2.12)

valor asignado a una magnitud, mediante un acuerdo, para un determinado propósito

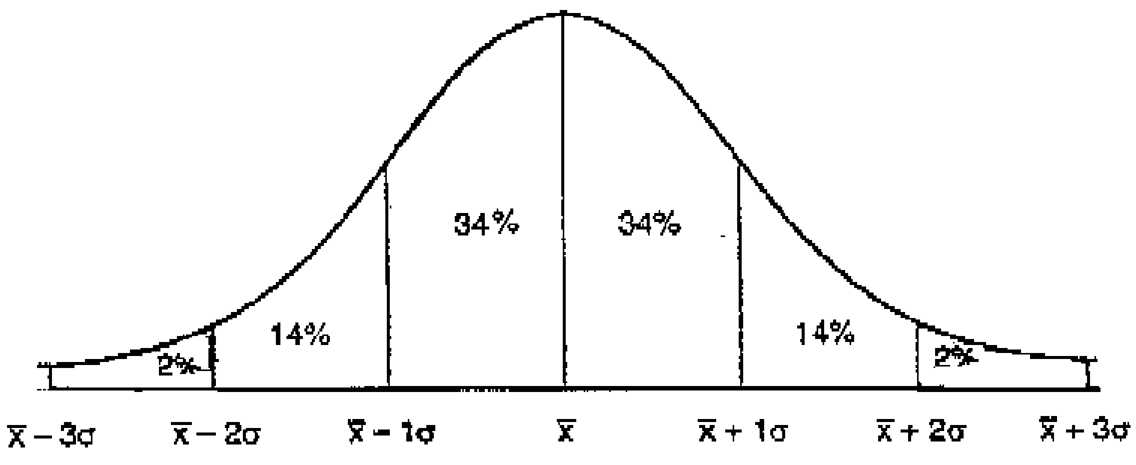
Nota.- Habitualmente se utiliza para este concepto el término "***valor convencionalmente verdadero***" que para muchos propósitos prácticos se considera suficientemente cercano al valor verdadero.

EJEMPLO

Valor convencional de la aceleración de caída libre (antes llamada "aceleración normal debida a la gravedad") $g_{\mathrm{n}} = 9{,}806\ 65\ \mathrm{m\ s^{-2}}$.

Formalmente la INCERTIDUMBRE DE MEDICION ***u*** se define como:

- parámetro no negativo que caracteriza (=cuantifica) la **dispersión** de los valores que razonablemente (=utilizando todo lo mejor que tenemos) se puede atribuir al mensurando a partir de la información que se utiliza



- Al hablar de **dispersión** es claro que al mensurando no puede atribuírsele un único valor sino que se le atribuye un intervalo de valores que son coherentes con todos nuestros conocimientos.
- El resultado es útil si esa dispersión es suficientemente pequeña
- La existencia de ***u*** no significa que se duda de la validez de la medición, por el contrario:

" **un cálculo adecuado de *u* significa una mayor confianza en la validez del resultado de la medición.** "

DEFINICIONES ANTERIORES de *u*

- Una medida del posible error del resultado de medición.

- Objeción:

El error, estrictamente hablando , es **imposible** de conocer exactamente .

Otra definición:

- Un estimado que caracteriza (=mide) el intervalo de valores dentro del cual se sitúa el valor verdadero de un mensurando.

- Objeción:

- otra vez es **imposible** conocer exactamente el valor verdadero de un mensurando.

- Tanto el error como el valor verdadero son conceptos IDEALES.
- Son objetivos a los que apuntamos y quisiéramos llegar o conocer exactamente pero nunca lo podemos hacer completamente.
- Como se ve la definición adoptada por la GUM se enfoca en valores que sí se pueden conocer, esto es :
- 1) El **resultado de la medición** y
- 2) La evaluación de la **dispersión asociada** .

Podemos decir que en base a nuestros mejores conocimientos y capacidades actuales **creemos** con un alto nivel de probabilidad que:

" el valor absoluto del error $|E|$ es menor o igual a la Incertidumbre calculada U "

$$|E| \leq U$$

2.3 TERMINOS ESPECIFICOS DE LA GUM

2.3.1 INCERTIDUMBRE ESTANDAR ***u***

- Incertidumbre del resultado de medición expresado como una desviación estándar

2.3.2 Evaluación Tipo A de Incertidumbre

Es un método que evalúa la incertidumbre a través de un análisis estadístico de una serie de observaciones

2.3.3 Evaluación Tipo B de Incertidumbre

- Es un método que evalúa la incertidumbre a través de medios **diferentes** al análisis estadístico de una serie de observaciones

2.3.4 INCERTIDUMBRE ESTANDAR COMBINADA u_c

- Incertidumbre estándar del resultado de una medición evaluada a través de la Ley de Propagación de la Incertidumbre.

- Esta ley combina apropiadamente (según nuestros actuales conocimientos) todas las incertidumbres aportadas por las magnitudes que influyen sobre el resultado de la medición.

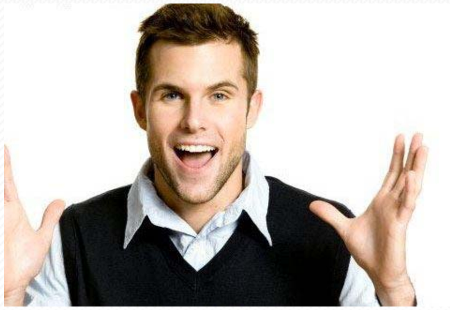
2.3.4 INCERTIDUMBRE EXPANDIDA *U*

- Incertidumbre que define un intervalo alrededor del resultado de medición que abarca una fracción **suficientemente grande** de la dispersión de los valores que "**razonablemente**" pueden atribuirse al mensurando ***Y***
- Esta fracción puede interpretarse como la probabilidad o nivel de confianza ***p*** del intervalo.

2.3.6 FACTOR DE COBERTURA k

- Es el factor por el que se multiplica u_c para obtener U:

$$U = k\ u_c$$



3.- CONCEPTOS BASICOS

3.1 MEDICION

- El objetivo de una medición es determinar el valor del mensurando.
- Por consiguiente una medición empieza con una DEFINICION APROPIADA DEL MENSURANDO

¿ Qué es lo que se quiere medir ?

- Contestar a esta pregunta es **crucial**.
- La definición misma del mensurando implica desde ya una cierta indefinición.
- Entre mayor sea la indefinición mayor será la incertidumbre causada por la definición misma del mensurando u_{DEF}

- Aún el método más perfecto de medición no puede producir una incertidumbre más pequeña que u_{DEF}

EJEMPLO: Medición de la longitud de una barra de acero de aproximadamente 1metro

- Si necesita determinarse con una exactitud de micrómetros debe especificarse la temperatura, presión, modo en que debe sostenerse, etc.

- Si se necesita sólo una exactitud de milímetros no se requieren datos adicionales.

- La especificación del mensurando requiere un enunciado claro, no ambigüo de lo que se desea medir.
- Debe ser claro si se necesita hacer o no hacer un muestreo.

EL MODELO MATEMATICO

- El modelo matemático que transforma el conjunto de observaciones repetidas en el resultado de medición es de importancia crítica debido a que incluye además de las observaciones directas un conjunto de magnitudes de influencia **iq** que son imperfectamente conocidas y a que puede NO incluir otras **iq** que permanecen ocultas o desconocidas .

Identificación de las fuentes de *u*

- Al empezar la lista de las fuentes de ***u*** se inicia con las magnitudes que aparecen explícitamente en el modelo matemático propuesto.
- Es útil preparar un diagrama de CAUSA-EFECTO tipo árbol.
- Las ramas principales son las magnitudes que aparecen explícitamente en el modelo matemático propuesto.

- Cada rama principal es influenciada por ramas secundarias que son las magnitudes de influencia que no aparecen explícitamente en el modelo.
- Se añaden tantas ramas secundarias hasta que sus efectos sean tan remotos que se conviertan en despreciables

- Las magnitudes duplicadas (efectos similares en el mismo momento)se pueden agrupar en una sola rama y las que se cancelan entre sí se eliminan del diagrama.

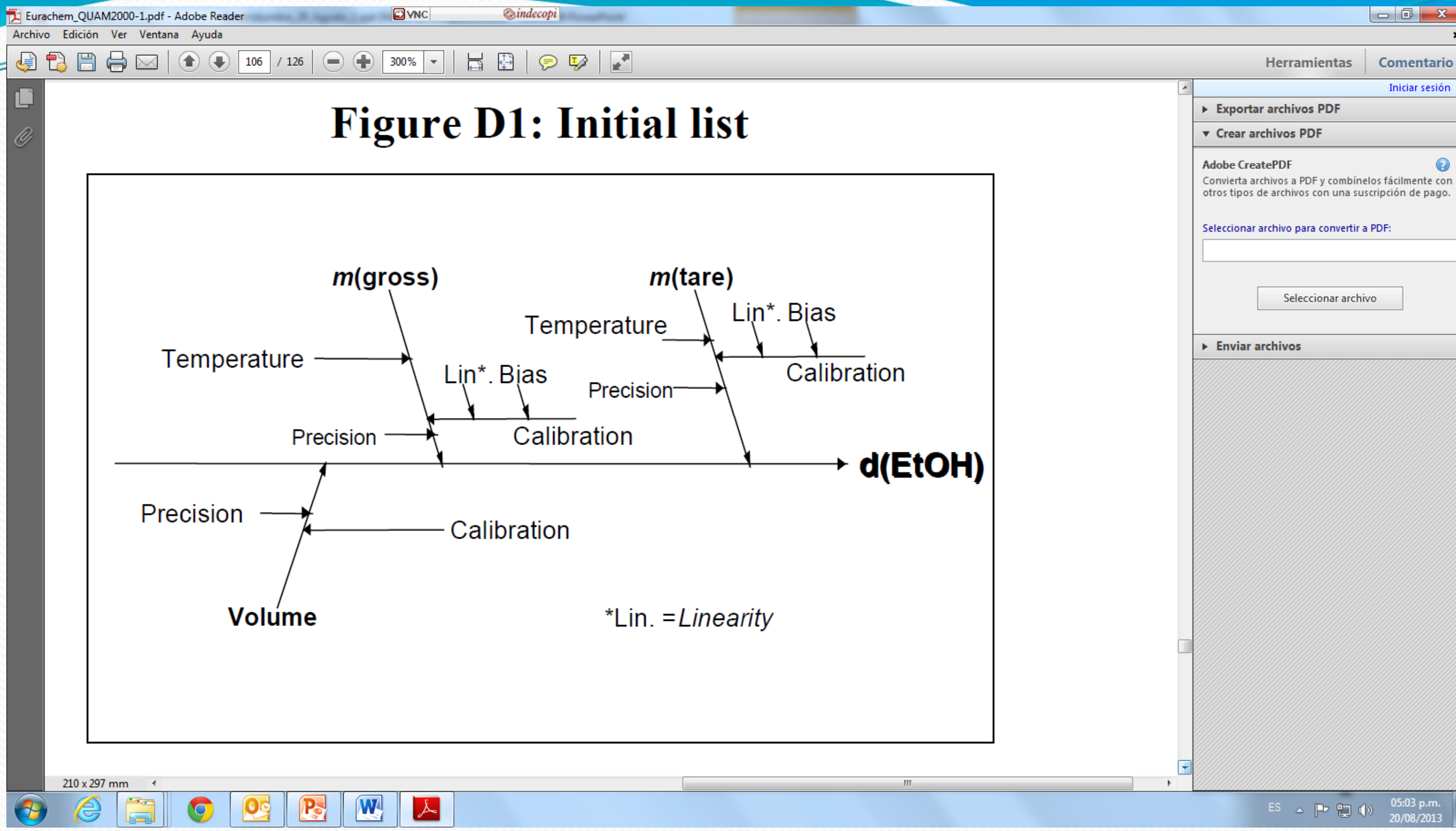
- Se regresa al modelo matemático y se añade nuevos términos que tengan en cuenta las magnitudes de influencia significativas del diagrama Causa-Efecto

Ejemplo D.4 EURACHEM

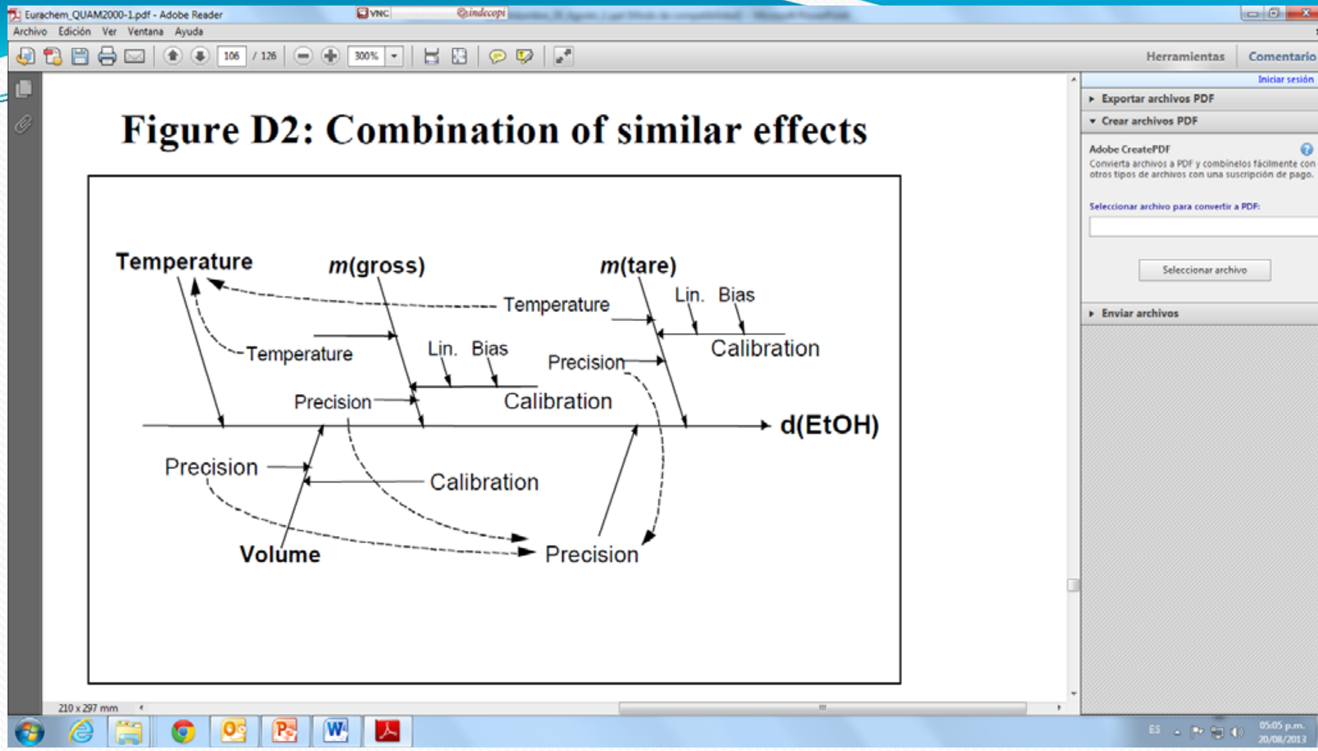
- Medición de la densidad de etanol
- Se mide la masa de etanol pesando una fiola de volumen V sin etanol: masa=m_{tara} y luego pesándola con etanol: masa= m_{gross} :

$$d(EtOH)=(m_{gross} - m_{tara})/ V$$

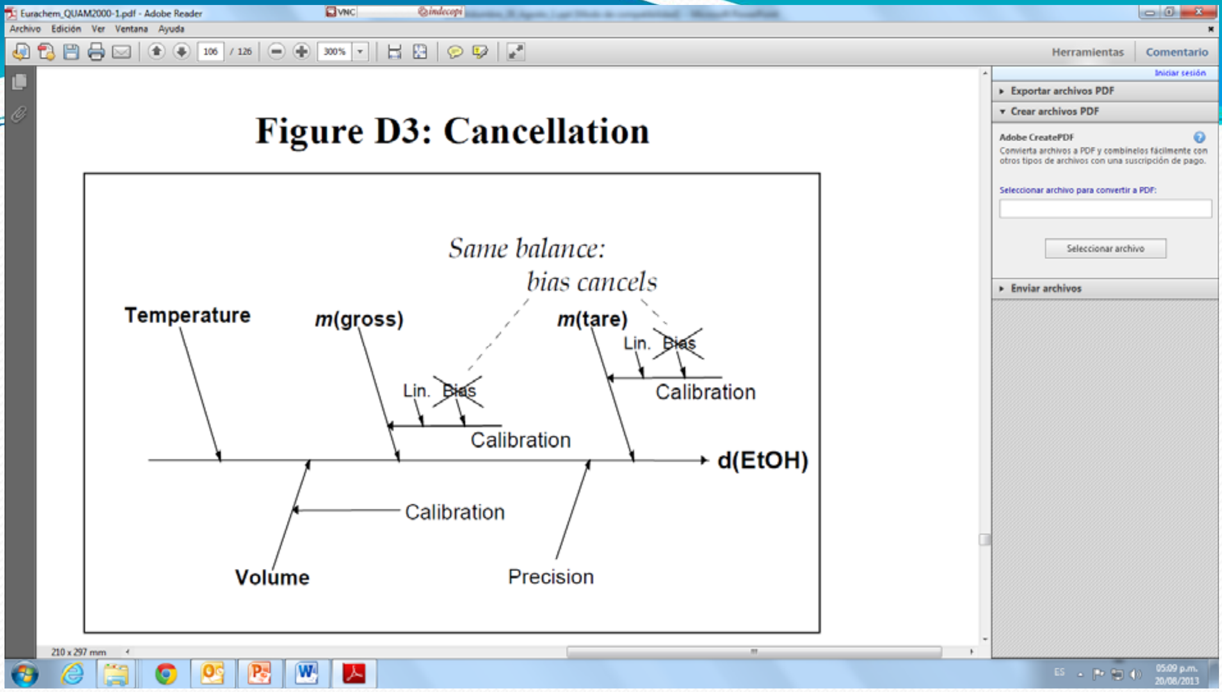
El ensayo se repite n veces .



- Ramas principales y secundarias
- Note que hay dos efectos de temperatura ,tres efectos de precisión y tres efectos de calibración



- Los efectos de temperatura y precisión pueden agruparse.
- Las variaciones observadas en cada determinación de m_{tara} ; m_{gross} ; V contribuyen a la variación total observada para ***d(EtOH)*** .



- La desviación sistemática de las dos pesadas se puede cancelar.
- Las dos ramas secundarias por calibración para las masas se distinguen por una posible no linearidad de la balanza
- La rama de calibración para el volumen es por la incertidumbre en su certificado de calibración

3.2 ERRORES ,EFECTOS Y CORRECCIONES

- Toda medición tiene imperfecciones que producen el llamado "**error de medición**".
- Tradicionalmente dicho error se ve formado por dos componentes: el error aleatorio (VIM 3.13) y el error sistemático (VIM 3.14):

ERROR = ERROR SISTEMATICO +
ERROR ALEATORIO

- Se presume que el error aleatorio surge por variaciones impredecibles y estocásticas de las **iq** .
- Si bien no es posible eliminar este error usualmente puede ser reducido aumentando el número de mediciones.
- Sólo en el límite ideal de infinitas mediciones se eliminaría este error.

- Los errores sistemáticos son desviaciones con un sentido o tendencia definida , positiva o negativa.
- El ejemplo típico es medir una longitud a una temperatura promedio diferente de 20 °C .

- Si el error surge de una fuente conocida se trata de eliminarla. Si no es posible podría en principio, evaluarse y aplicarse una CORRECCION para compensarlo.

- Se asume que aplicada la corrección la expectación de dicho error es cero .

- Es claro que a su vez la corrección no es perfecta y que conlleva cierta incertidumbre .

- Se asume que el resultado de medición ha sido corregido por todos los efectos sistemáticos reconocidos e inevitablemente existentes y que se han hecho todos los esfuerzos para identificar tales efectos

Ejemplos

- La corrección en un instrumento de medición calibrado compensa su error sistemático pero sólo aproximadamente . Subsiste una incertidumbre asociada a esta corrección.

- La corrección por temperatura en las mediciones de longitud para llevarla a condiciones de 20 °C .

3.3 INCERTIDUMBRE

- La existencia de ***u*** refleja el **siempre** imperfecto conocimiento del mensurando ***Y***

- Aún después de aplicar todas las correcciones por los efectos sistemáticos reconocidos el resultado de medición es imperfecto debido a las variaciones que surgen por los efectos aleatorios y a que las correcciones también tienen imperfecciones.

- No debe confundirse la incertidumbre con el error de medición.

- Por ejemplo es posible que el resultado de medición esté extremadamente cerca del valor del mensurando (y por lo tanto el error sea despreciable) y aún así puede tener asociada una incertidumbre grande.
- Se espera más bien que U sea el límite máximo del valor absoluto del error E de medición :

$$|E| \leq \quad U$$

Fuentes de Incertidumbre según la GUM

a) u_{DEF}

b) Realización imperfecta de la definición del mensurando

c)Muestreo no representativo

d)Imperfecto conocimiento de los efectos de las condiciones ambientales o imperfecta medición de ellas.

e)Lectura imperfecta de instrumentos analógicos (paralaje)

f)Resolución finita de instrumentos digitales o umbral de discriminación de los instrumentos.

g)Valor inexacto de los patrones de medición y de los materiales de referencia.

h) Valor inexacto de las constantes u otros parámetros obtenidos de fuentes externas y usados en el modelo matemático o algorritmo de reducción de datos .

i)Aproximaciones y suposiciones incorporadas en el método y procedimiento de medición .

j) Variaciones en observaciones repetidas del mensurando bajo condiciones aparentemente idénticas

k)Imperfecciones del modelo matemático

- Estas fuentes no necesariamente son independientes y varias de ellas pueden contribuir a la fuente j)

- La incertidumbres tipo A y tipo B no tienen nada que ver con las palabras “aleatorio” o “sistemático “.

- No tienen que ver con la naturaleza de la fuente (aleatoria o sistemática) sino con la forma de evaluarla.

- Ambos tipos de evaluación están basados en distribuciones de probabilidad.

- Una incertidumbre de tipo A se obtiene a partir de una serie de mediciones repetidas y es la familiar varianza calculada según las conocidas fórmulas de estadística *s*²

$$s^2(q_k) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(q_k - \bar{q})^2$$

siendo q_k la k-ésima medición y $\bar{q}$ el promedio de las n mediciones hechas

- Una incertidumbre de tipo B se obtiene a partir de una función de probabilidad ASUMIDA según los mejores conocimientos que tenemos del evento que ocurre.

- Las diversas fuentes de incertidumbre son combinadas matemáticamente según la llamada **"Ley de Propagación de la Incertidumbre"** para obtener la llamada incertidumbre combinada u_c

- Para cumplir los requerimientos de algunas aplicaciones industriales, de salud, de seguridad y/o comerciales se calcula un límite superior para el valor absoluto del error que tenga un nivel de confianza suficientemente alto (Ej: 95% ó 99%).

- Esta es la Incertidumbre Expandida $\boldsymbol{U}$ que se calcula multiplicando $\boldsymbol{u_c}$ por el llamado factor de cobertura $\boldsymbol{k}$: $\boldsymbol{U = k\, u_c}$

- k usualmente está en el intervalo de 2 a 3 y siempre debe ser mencionado explícitamente para poder recobrar u_c cuando sea necesario.

3.4 CONSIDERACIONES PRACTICAS

- La exactitud requerida de la medición, es lo que determina la complejidad del modelo matemático.

- Debido a que este modelo pudiera ser incompleto todas las magnitudes que se consideren importantes deberían variarse tanto como lo permitan las condiciones de modo que pueda medirse su impacto en la $\boldsymbol{u_c}$

- Cuando sea posible hay que usar patrones de verificación y/o cartas de control que indiquen que la medición está bajo control estadístico.

- El modelo matemático debe revisarse constantemente sobre todo si los datos observados muestran alguna incoherencia.

- Algunas veces las correcciones y sus incertidumbres asociadas son muy pequeñas comparadas con $\boldsymbol{u_c}$.

- En estos casos pueden ignorarse las correcciones y sus incertidumbres asociadas .

- Los errores humanos al registrar o procesar los datos pueden introducir graves distorsiones.
- Errores grandes pueden detectarse por una buena revisión de los datos o por procedimientos estadísticos conocidos.
- Ejemplo: El Criterio de Romanovski seguido de una cuidadosa evaluación.

- Sin embargo errores pequeños de este tipo pueden quedar ocultos.

- Los cálculos de incertidumbre no están diseñados para tomar en cuenta este tipo de errores.

- La GUM da la forma de calcular la incertidumbre pero no puede sustituir al pensamiento crítico, la honestidad intelectual y la habilidad profesional.

- El modelo para el cálculo de incertidumbre no es un trabajo rutinario o puramente matemático sino que depende de un conocimiento detallado de la naturaleza de la medición misma.

- Su calidad depende en última instancia de **la comprensión , del análisis crítico y de la integridad profesional de las personas que lo elaboran .**

4.- Evaluando la u_c

4. EVALUANDO LA u_c

- En muchos casos un mensurando $\boldsymbol{Y}$ no se mide directamente sino que se obtiene a partir de otras N magnitudes intermedias $\boldsymbol{X_1}$; $\boldsymbol{X_2}$; ..... $\boldsymbol{X_N}$ a través del modelo matemático expresado en una función matemática $\boldsymbol{f}$:

$$Y = f(X_1 \ ; X_2 \ ; \ \ldots\ldots X_N) \qquad (1)$$

- En una serie de observaciones el *k*-ésimo valor observado de X_i se denota como $X_{i,k}$

- La mejor estimación de X_i (su "expectación") se denota por x_i llamado su "**estimado de entrada**"

EJEMPLO

- Si se aplica un potencial ***V*** a los terminales de un resistor cuya resistencia es $\boldsymbol{R_o}$ a la temperatura $\boldsymbol{t_o}$ y depende linealmente de la temperatura mediante el coeficiente $\boldsymbol{\alpha}$.
- La potencia ***P*** disipada es :

$$P = f(V, R_o, \alpha, t) = V^2 / R_o\left[1 + \alpha(t - t_o)\right]$$

- Si f no modela la medición con la exactitud requerida puede ser necesario incluir otras magnitudes de entrada X_i
- Ejemplo:
- Si la distribución de temperatura no es uniforme en el resistor, si la dependencia con la temperatura no es lineal, si hay dependencia de la presión barométrica.

- Las X_i pueden ser determinadas directamente en el curso de la medición a través de instrumentos de medición.

- O las X_i pueden ser importadas desde fuentes externas tales como correcciones de certificados de calibración , MRCs , datos de handbooks, etc.

- El resultado de la medición y llamado el "estimado de salida" se calcula usando los estimados de entrada x_i :

$$y = f(x_1\ ; x_2\ ; \ldots.. \ ; x_N\ )$$

- Algunas x_i se obtienen a partir de una serie de observaciones $X_{i,k}$ de la magnitud X_i

- Otras $\boldsymbol{x}_i$ se importan y se asume en base a nuestros conocimientos la distribución de probabilidad de la que proceden.

- En ambos casos las distribuciones de probabilidad son MODELOS de los que nos servimos para representar el estado actual de nuestros conocimientos .

4.2 Evaluación de incertidumbre tipo A

- En general si una magnitud ***q*** que varía aleatoriamente puede determinarse a través de una serie de mediciones independientes q_k bajo condiciones de repetibilidad el mejor estimado es el promedio aritmético de la serie :

$$\bar{q} = \frac{1}{n}\left(q_1 + q_2 + \ldots + q_n\right) = \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n} q_k \ldots (3)$$

- Las mediciones q_k varían entre sí debido a que las magnitudes de influencia **iq** (temperatura ambiente, humedad, campos electromagnéticos,..) están variando también .
- Si no se detectan variaciones en las q_k puede ser porque la resolución del instrumento de medición sea insuficiente.

- El mejor estimador de la varianza σ^2 de la distribución de probabilidad de ***q*** es la varianza experimental $s^2(q_k)$ de la serie .

- $s^2(q_k)$ se calcula mediante la conocida fórmula estadística para la varianza :

$$s^2(q_k) = \left(\frac{1}{n-1}\right)\sum_{k=1}^{n}(q_k - \bar{q})^2 \ldots(4)$$

Varianza del promedio

- Si tomáramos varios grupos de ***n*** mediciones y obtenemos sus promedios, podemos calcular a su vez la varianza de dichos promedios.
- El mejor estimador de la varianza de dichos promedios es:

$$s^2(\overline{q}) = s^2(q_k)/n \ldots\ldots(5)$$

- La desviación estándar experimental $s(\bar{q})$ de los promedios cuantifica qué tan bien el promedio $\bar{q}$ estima a la expectación estadística de q .
- Por esto **$s(\bar{q})$ es una medida de la incertidumbre de $\bar{q}$**

Para la variable X_i

$$s(\overline{X_i}) = \frac{s(X_{i,k})}{\sqrt{n}} = u(x_i)$$

- El número ***n*** debe ser suficientemente grande para que $\bar{q}$ sea un buen estimado de la expectación de ***q***

Ejemplo:20 mediciones de temperatura

- En la Tabla 1 de la GUM se dan 20 mediciones t_k de temperatura de una cámara hechas con un RTD.
- El promedio es $\bar{t}$ =100,145 °C ≅ 100,14 °C
  Aplicando la ec.(4) se tiene: $s(t_k)$=1,489°C ≅ 1,49 °C
- La desviación estándar experimental del promedio $s(\bar{t})$ que es también la incertidumbre:

$$u(\bar{t})=s(t_k)/(20)^{1/2}=0{,}333\,°\mathrm{C} \cong 0{,}33\,°\mathrm{C}$$

- Si el proceso de medición está bien caracterizado bajo control estadístico puede disponerse de una incertidumbre estándar histórica s^2_p .
- En este caso:

$$u = s_p / \sqrt{n}$$

- Note que si existe s_p entonces n=1 es posible .

- Si las variaciones aleatorias de las X_i están correlacionadas , el promedio y la desviación estándar experimental pueden ser estimadores inapropiados.

- En estos casos debe aplicarse métodos estadísticos especiales (Ej varianza Allen)

4.3 Evaluación tipo B

- Si un estimado de entrada x_i no es obtenido a partir de una serie de mediciones repetidas, entonces su varianza e incertidumbre estándar se evalúan por un análisis científico basado en toda la información disponible.

Esta información puede incluir:

- Datos previos de medición
- Conocimiento del comportamiento y propiedades de materiales importantes
- Especificaciones de fabricantes
- Datos de calibraciones y certificados
- Datos de referencia en handbooks .

- La varianza e incertidumbre evaluadas de esta manera son llamadas del Tipo B.

- Una evaluación de tipo B puede ser **tanto o tal vez aún más confiable** que una evaluación de tipo A especialmente en situaciones donde ***n*** es pequeño.

Formas de obtener $u(x_i)$

- Si el estimador x_i es tomado de alguna fuente que indica que su incertidumbre asociada es un múltiplo dado de una desviación estándar, entonces $u(x_i)$ es simplemente ese valor indicado de incertidumbre dividido por el multiplicador dado .

Ejemplo (4.3.3 GUM)

La masa de un patrón de masa es:

m_s =1 000,000 325 gramos y su incertidumbre es 240 microgramos al nivel de 3 desviaciones estándar.

Entonces la incertidumbre estándar es:

$$u(m_s) = 240\ \mu g / 3 = 80\ \mu g$$

- Algunas veces la incertidumbre asociada se dice que define un intervalo con un cierto nivel de confianza ***p*** dado.

- A menos que se indique otra cosa se asumirá que se ha usado una distribución de probabilidad NORMAL, por lo que la $u(x_i)$ se obtendrá dividiendo la citada incertidumbre por el factor asociado a la probabilidad ***p*** según el comportamiento bien conocido de la distribución normal .

Ejemplo de 4.3.5 de la GUM

- La longitud de un objeto es l=(10,11 ± 0,04) mm con probabilidad de 0,5
- **a** = 0,04 mm
- Según lo visto para la Distribución Normal el intervalo de 50 % de confianza es 0,676 $\sigma \cong$ **a**
- Por lo tanto: $u \cong \sigma \cong (1/0{,}676)\,\mathbf{a} = 0{,}06$ mm

Distribución Rectangular

- La probabilidad de que X_i tome el valor $x_i \pm a$ para todos los propósitos prácticos es igual a 1 (100%) y fuera de este intervalo es esencialmente cero.
- El mejor estimador es el centro del intervalo, es decir , el mismo valor x_i
- La incertidumbre estándar es:

$$u(x_i) = a / \sqrt{3}$$

EJEMPLO DE 4.3.7 DE LA GUM

El coeficiente de expansión α del cobre puro a 20 °C es $16{,}52 \times 10^{-6}$ °C^{-1} y el error en este valor no debe exceder $0{,}40 \times 10^{-6}$ °C^{-1}

Entonces : **a**= $0{,}40 \times 10^{-6}$ °C^{-1}

$$u(\alpha) = a / \sqrt{3} = 0{,}23 x 10^{-6} {}^{\circ}C^{-1}$$

- **Caso de límites No simétricos:**

$$u(x_i) = (a_+ - a_-)/\sqrt{12}.$$

Distribución trapezoidal:

- Base Inferior= $a_+ - a_- = 2a$
- Base Superior= $2a\beta$ con $0 \leq \beta \leq 1$
- Si $\beta = 0$ se tiene una distribución triangular
- Si $\beta = 1$ se tiene una distribución rectangular

- Incertidumbre estándar:

$$u(x_i) = a\sqrt{(1+\beta^2)/6}..$$

CONVOLUCION DE DISTRIBUCIONES

- La distribución trapezoidal es equivalente a la convolución (combinación) de dos distribuciones rectangulares de semianchos: $a_1=a(1+\beta)/2$; $a_2=a(1-\beta)/2$

La varianza es:

$$u^2=a_1^2/3 + a_2^2/3 = a^2(1+\beta^2)/6$$

La distribución convolucionada puede interpretarse como una distribución rectangular de semiancho a_1 que tiene ella misma una incertidumbre representada por la distribución rectangular de semiancho a_2 y modela el hecho de que los límites de la X_i no son exactamente conocidos.

- Aún si a_2 es tan grande como el 30% de a_1 , $\boldsymbol{u}$ excede

$$a_1 / \sqrt{3}$$

en no más del 5 % .

COMPARACION DE DISTRIBUCIONES

D. Trapezoidal u=60,6% a_1 ;(a_2=30% a_1)

D. Rectangular u=57,7% a (a:semiancho)

D. Triangular u=40,8% a (a:semiancho)

D. Normal u=38,76%a (a=2,58σ; 99%)

Las incertidumbres no son demasiado diferentes a pesar de provenir de distribuciones muy diferentes.

La comparación de varianzas de las distribuciones normal, rectangular y triangular indica que sus magnitudes son sorprendentemente similares a pesar de provenir de distribuciones con justificaciones notablemente diferentes

ILUSTRACION GRAFICA DE EVALUAR INCERTIDUMBRES

- Figura 1 ; Tabla 1 de la GUM
- Figuras 2a ; 2b de la GUM

- **Distribución Normal**
- Expectación: 100,14 °C $\boldsymbol{u}(\bar{t})$=0,33°C

- **Distribución rectangular**:
- Expectación: 100 °C $\boldsymbol{u}(\bar{t})$=2,3 °C

- **Distribución triangular**:
- Expectación: 100 °C $\boldsymbol{u}(\bar{t})$=1,6 °C

- También es posible determinar directamente la contribución combinada de varias fuentes usando datos anteriores, por ejemplo de estudios de Validación, de comparaciones interlaboratorios, de control de calidad o de aseguramiento metrológico.
- Para fuentes de incertidumbre no cubiertas adecuadamente debe buscarse información adicional en la biliografía u otras fuentes (internet, papers, certificados , especificaciones, handbooks, ...)
- En el caso extremo puede ser necesario planificar experimentos para obtener los datos adicionales.

- Ejemplo; estudios específicos para determinar contribuciones únicas a **u** .
- Estudios para asegurar una variación representativa de varios factores.

En la práctica pocas son las fuentes que tienen predominancia sobre el valor final de **u** .

Así las fuentes muy pequeñas pueden despreciarse .

5. DETERMINANDO U_C

- MAGNITUDES DE ENTRADA X_i NO CORRELACIONADAS

- Modelo Matemático: $y = f(x_1; x_2; \ldots\ldots\ldots; x_N)$

- La $u_c(y)$ depende de las incertidumbres $u(x_i)$ de cada uno de los estimados de entrada .
- Cada $u(x_i)$ es una incertidumbre estándar evaluada como se describe en 4.2 para el Tipo A ó como se describe en 4.3 para el Tipo B

- La $u_c(y)$ depende también de qué tanto influye x_i sobre y .
- Por ejemplo si x_i aparece elevada a la cuarta potencia en la función f influirá muchísimo más que si solo estuviera elevada a la primera potencia .

- Qué tanto influye x_i sobre y está dado por los llamados coeficientes de sensibilidad c_i .

- Matemáticamente c_i se evalúa tomando la derivada parcial de la función f respecto de x_i:

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

- Luego se suma cuadráticamente todas estas componentes según la llamada Ley de propagación de la Incertidumbre:

$$u_c^{\,2}(y) = c_1^{\,2}u^2(x_1) + c_2^{\,2}u^2(x_2) + \ldots$$
$$c_N^{\,2}u^2(x_N)$$

- En forma de sumatoria :

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) \ldots\ldots\ldots (10)$$

La $u_c(y)$ es una desviación estándar combinada que caracteriza (al nivel estándar) la dispersión de los valores que puede atribuirse al mensurando Y de acuerdo a nuestros mejores conocimientos.

- Matemáticamente puede verse que esta Ley está basada en una expansión de primer orden de la función f en una serie de Taylor alrededor de f evaluada en cada uno de sus estimadores de entrada x_i

- Si la no linearidad de f es significativa puede ser necesario añadir términos de mayor orden en la expansión .

- EJEMPLOS DE CALCULOS DE DERIVADAS PARCIALES (5.1.3 GUM)

Si f es sólo sumas (o restas) lineales

- Si $y=\beta_1x_1+\beta_2x_2+....+\beta_Nx_N$ donde los β_i son coeficientes constantes ,entonces:

$$u_c{}^2(y)=\beta_1{}^2u^2(x_1)+\beta_2{}^2u^2(x_2)+...$$
$$+\beta_N{}^2u^2(x_N)$$

Si *f* es sólo productos (o divisiones) con potencias

- Si $y = c\, x_1^{p_1}\, x_2^{p_2} \ldots\ldots x_N^{p_N}$ donde c es una constante y las p_i son las potencias (números constantes) a las que se eleva cada x_i entonces :

$$\left[\frac{u_c(y)}{y}\right]^2 = \left[\frac{p_1 u(x_1)}{x_1}\right]^2 + \left[\frac{p_2 u(x_2)}{x_2}\right]^2 + \ldots\ldots + \left[\frac{p_N u(x_N)}{x_N}\right]^2$$

- Puede hacerse también una transformación logarítmica que lineariza exactamente la función f

$$z = ln\, y \quad ; \quad w_i = ln\, x_i$$

- Resulta :

$$z = ln\, c + p_1\, ln\, w_1 + \ldots + p_N\, ln\, w_N$$

5.2 MAGNITUDES DE ENTRADA CORRELACIONADAS

- Si las magnitudes de entrada X_i están correlacionadas (y para verificarlo existen tests de correlación) a la fórmula vista para el caso de magnitudes no correlacionadas se debe añadir términos que representen esta correlación.

La covarianza asociada entre X_i , X_j se denota por

$u(x_i , x_j)$

y se estima de la siguiente manera:

Se efectúan n pares de mediciones simultáneas de X_i , X_j bajo las mismas condiciones, obteniéndose como promedios los valores x_i x_j

El estimador de $u(x_i ,x_j)$ se denota como $s(x_i ,x_j)$ y se calcula según :

$$s(x_i, x_j) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n} (X_{i,k} - x_i)(X_{j,k} - x_j)$$

$$(Ecuación\ 17)$$

LEY DE PROPAGACIÓN PARA MAGNITUDES CORRELACIONADAS

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i) +$$

$$2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} c_i c_j u(x_i, x_j)$$

- La covarianza asociada con x_i, x_j está relacionada con las incertidumbres $u(x_i)$ $u(x_j)$ por medio del coeficiente de correlación $r(x_i, x_j)$ según :

$$u(x_i, x_j) = r(x_i, x_j) u(x_i) u(x_j) \ldots\ldots (14)$$

Siempre ocurre que : $-1 \leq r(x_i, x_j) \leq +1$

Si X_i X_j son independientes entonces

$$r(x_i, x_j) = 0$$

EJEMPLOS

Puede haber correlación entre dos magnitudes de entrada si se usa el mismo instrumento de medición , el mismo patrón físico o datos de referencia comunes.

Si la correlación existe y es significativa obviamente no puede ignorarse.

6. DETERMINANDO LA INCERTIDUMBRE EXPANDIDA *U*

- Muchas aplicaciones industriales, de salud, seguridad y/o de intercambio comercial requieren que se de una medida de incertidumbre que defina un intervalo alrededor del resultado de medición que se espera abarque una fracción suficientemente grande de la distribución de valores que se puede atribuir razonablemente al mensurando.

- La medida de incertidumbre que cumple estos requisitos es llamada Incertidumbre Expandida denotada como U
- U se obtiene de $u_c(y)$ a través del factor de cobertura k según :

$$U = k\, u_c(y)$$

- El resultado de la medición se expresa entonces como :

$$Y = y \pm U$$

que se interpreta diciendo que :

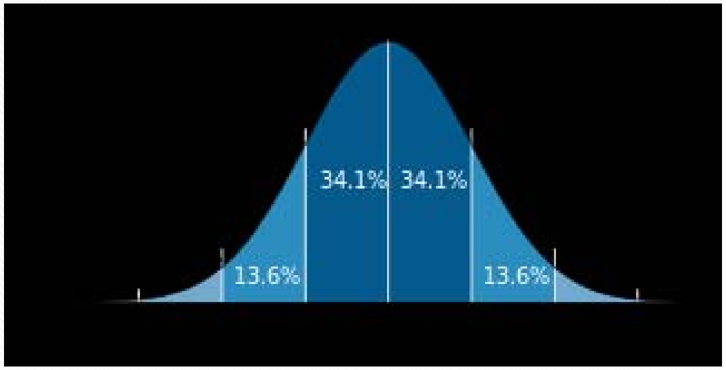
- El mejor estimado de ***Y*** es ***y***
- El intervalo ***y-U*** hasta ***y+U*** abarca una fracción suficientemente grande de los valores que razonablemente pueden atribuirse a ***Y***

Esta fracción suficientemente grande se denota como ***p*** y se le llama la probabilidad de cobertura o "Nivel de Confianza" del intervalo .

Debe reconocerse que muchas veces el valor de ***p*** es aproximado debido al limitado conocimiento que se tiene de la distribución de probabilidad de ***Y*** y al valor mismo de $u_c(y)$ (incertidumbre de la incertidumbre)

ESCOGIENDO UN VALOR PARA *k*

- El valor de ***k*** depende del valor que se escoge para ***p*** .
- Generalmente está en el rango de 2 a 3 .
- Si la distribución de probabilidad de ***Y*** es aproximadamente normal y los grados efectivos de libertad son grandes muchas veces se puede asumir que ***k***=2 corresponde a ***p***= 95 % y que ***k***=3 corresponde a 99%



- El número total de grados de libertad asociado a $u_c(y)$ se calcula con la ecuación de Welch-Satterthwaite G.2b de la GUM :

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}}$$

- Habiendo escogido el nivel de confianza suficiente ***p*** y habiendo determinado ν_{eff} se puede usar la Tabla G.2 de la GUM para determinar el valor de **k** .

Muchas veces ocurre que:

Hay un número significativo de X_i que tienen distribuciones de probabilidad razonablemente conocidas (normales o rectangulares).

Las $\boldsymbol{u\ (x_i)}$ contribuyen en cantidades comparables a $\boldsymbol{u_c(y)}$

La aproximación lineal pedida por la Ley de propagación de la Incertidumbre es adecuada.

La $u_c(y)$ es razonablemente pequeña y los grados efectivos de libertad son altos, mayores a 10

ENTONCES PUEDE ASUMIRSE QUE:

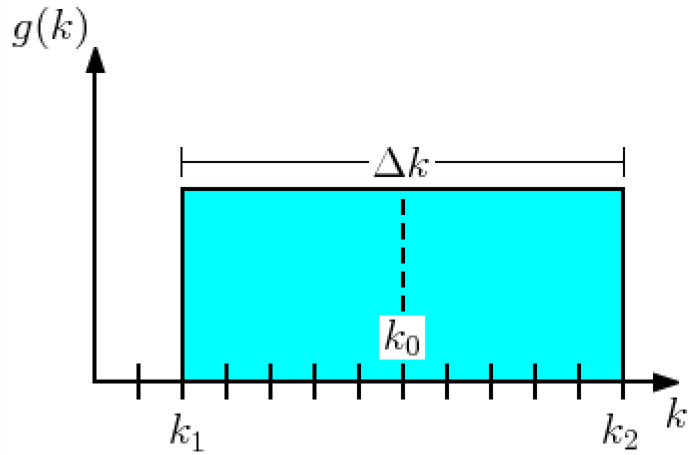
- La distribución de ***$u_c(y)$*** es casi normal y puesto que prácticamente no es posible distinguir entre intervalos que difieren en 1% ó 2% en el valor de ***p***

BAJO ESTAS CIRCUNSTANCIAS:

- Se puede asumir que con ***k*** = 2 se tiene un nivel de confianza de **aproximadamente** 95% y que con

k = 3 se tiene un nivel de confianza de **aproximadamente** 99%

Caso de una componente dominante rectangular



- Sea $u_1^2(y)$ el término rectangular dominante ; $u_R^2(y)$ la suma de las varianzas del resto de componentes.
- Si $u^2_R(y) \leq 30\%\ u_1^2(y)$ entonces la convolución de las distribuciones de todas las componentes produce una distribución de probabilidad final esencialmente rectangular .

Bajo estas condiciones:

- El factor de cobertura ***k(p)*** que depende del nivel de confianza ***p*** que se elige está dado por :

$$k(p) = p\sqrt{3}$$

- Por ejemplo si *p*=95 % entonces ***k(p)*** vale 1,65 y para ***p***= 99% ; ***k(p)*** vale 1,71

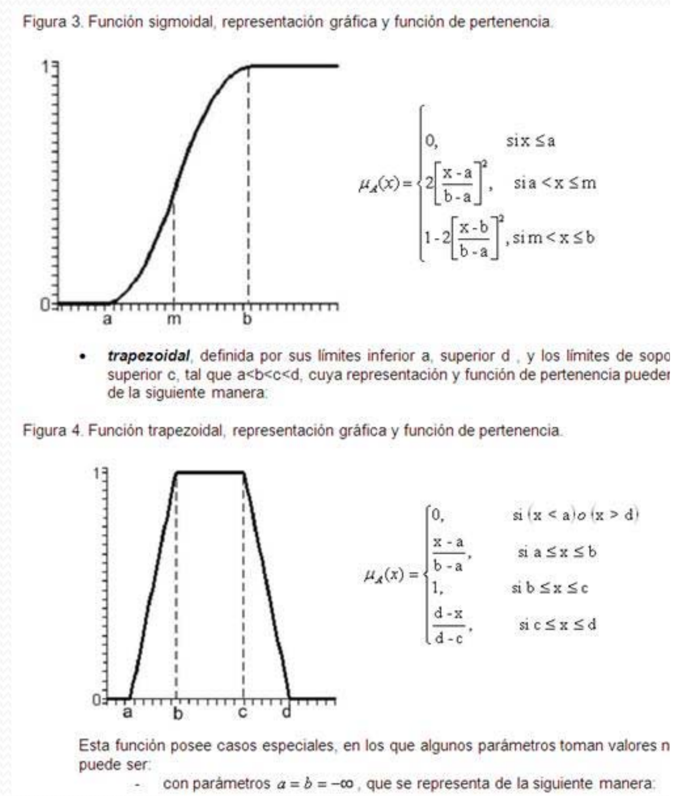
Caso de dos distribuciones rectangulares dominantes

- Sean $u_1^2(y)$; $u_2^2(y)$ las componentes rectangulares dominantes . Su suma es

$u_1^2(y) + u_2^2(y) = u_0^2(y)$

- Si $u_R^2(y) \leq 30\%\ u_0^2(y)$

entonces la convolución de estas dos distribuciones produce una distribución Trapezoidal y es la que da la forma esencial de la convolución de todas las componentes.



BAJO ESTAS CONDICIONES:

El trapezoide tiene una base mayor $a=a_1+a_2$ y una base menor

$b=| a_1-a_2 |= a\,\beta$

donde a_1 ; a_2 son los semianchos de las dos distribuciones rectangulares dominantes.

$\beta = b/a$ es el parámetro de borde del trapezoide.

Si β<0,95 para **p**=95% se tiene:

$$k(p) = \frac{1 - \sqrt{(1-p)(1-\beta^2)}}{\sqrt{\dfrac{1+\beta^2}{6}}}$$

7. Reportando la incertidumbre

- Es deseable que se dé toda la información necesaria para que pueda hacerse una reevaluación completa de toda la medición.
- Si se hace referencia a otros documentos o especificaciones es importante mantenerlos actualizados para que seamos consistentes con los procedimientos actuales.

DEBERIA INDICARSE:

- El procedimiento para calcular $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{u_c(y)}$ a partir de los datos observados.
- Las componentes de incertidumbre consideradas y cómo fueron evaluadas.
- Las correcciones y constantes usadas en el análisis y sus fuentes.

TEST :

- ¿Se ha dado la información suficiente, de una manera suficientemente clara ,de modo que el resultado puede actualizarse, si se dispusiera de nueva información o datos, en el futuro ?

REPORTANDO U

- Describir completamente cómo se define el mensurando Y .
- Reportar el resultado de la medición como: $Y = y \pm U$ dando las unidades usadas.
- Si es apropiado dar : $U \,/\, |y|$ la incertidumbre expandida relativa.
- Especificar el valor de k .
- Indicar el valor de p y cómo fue determinado.

Si es apropiado dar también:

- El valor de cada x_i , su asociada $u(x_i)$ y cómo fueron determinadas .
- Las covarianzas y/o los coeficientes de correlación estimados .
- La función f y los coeficientes de sensitividad:

$$c_i = \delta f / \delta x_i$$

EJEMPLO

- Se reporta la masa $\boldsymbol{m_s}$ de una pesa patrón de 100 g de valor nominal :

  $\boldsymbol{m_s}$= 100,021 47 g ± 0,000 79 g donde el valor que sigue al símbolo ± es la incertidumbre expandida ***U*** calculada con un factor de cobertura ***k*** = 2 para un nivel de confianza de aproximadamente 95 %

El valor numérico de ***U*** no debe tener dígitos excesivos . Usualmente es suficiente dar dos o tres dígitos significativos.

Cumplimiento contra Límites

Límite Superior L : Hay 3 casos

- 1) $y - U > L$: Claro incumplimiento.

- 2) $y + U \leq L$: Claro cumplimiento.

- 3) $y + U > L$ ó $y - U \leq L$

  Es incierto el cumplimiento . Debe revisarse los datos, repetir el ensayo y tratar de disminuir el valor de U .

- Para un límite inferior se aplican criterios análogos .

Comparación coherente de resultados de medición

- Se mide el mensurando **Y** por parte de dos entidades **1** y **2** (que pueden ser dos laboratorios, dos personas, dos grupos de investigación, etc.) obteniéndose los siguientes resultados
- 1) Entidad 1: $Y = y_1 \pm U_1$

  Entidad 2: $Y = y_2 \pm U_2$

¿Cómo se compara ambos resultados?

Se dirá que ambos resultados son compatibles si la diferencia $|y_1 - y_2|$ ***es suficientemente pequeña.***

Se considera que la diferencia $|y_1 - y_2|$ ***es suficientemente pequeña y por lo tanto que ambos valores*** y_1 ; y_2 ***son compatibles si se cumple que***

$$|y_1 - y_2| \le \sqrt{U_1^2 + U_2^2}$$

- El cociente $$\frac{|y_1 - y_2|}{\sqrt{U_1^2 + U_2^2}}$$

se conoce como error normalizado E_n

- La condición de compatibilidad entre dos resultados y_1 y_2 puede escribirse entonces como:

$$\frac{|y_1 - y_2|}{\sqrt{U_1^2 + U_2^2}} = E_n \leq 1$$

- El denominador es la incertidumbre expandida combinada de la diferencia $|\, y_1 - y_2 \,|$ y es válido siempre que ambos resultados y_1 ; y_2 sean independientes entre sí.

- **Si los resultados *y_1 ; y_2* no son independientes entre sí, es decir si están correlacionados el cociente debe considerar dicha correlación.**

- **Si se usan los coeficientes de correlación la relación puede escribirse así:**

$$\frac{|y_1 - y_2|}{\sqrt{U_1^{\,2} + 2r_{1,2}U_1U_2 + U_2^{\,2}}} = E_n \leq 1$$

- Los casos extremos de correlación están dados cuando los coeficientes de correlación toman los valores extremos ± 1.
- En el caso de la correlación completamente positiva:

$$\frac{|y_1 - y_2|}{\sqrt{U_1^{\,2} + 2U_1U_2 + U_2^{\,2}}} = \frac{|y_1 - y_2|}{\sqrt{(U_1 + U_2)^2}} = \frac{|y_1 - y_2|}{U_1 + U_2} = E_n \leq 1$$

- En el caso de la correlación completamente negativa:

$$\frac{|y_1 - y_2|}{\sqrt{U_1^{\,2} - 2U_1U_2 + U_2^{\,2}}} = \frac{|y_1 - y_2|}{\sqrt{(U_1 - U_2)^2}} = \frac{|y_1 - y_2|}{|U_1 - U_2|} = E_n \leq 1$$

GRACIAS POR SU ATENCION !